Inspectoratul şcolar judeţean Caraş-Severin

Universitatea de Vest din Timişoara
Facultatea de Matematică şi Informatică

Concursul interjudeţean de matematică ”Traian Lalescu”
Ediţia a XXIX-a
Reşiţa, 20-22 martie 2015

clasa a V-a

Problema 1. Câte din submulţimile nevide ale lui $A = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ au produsul elementelor divizibil cu 4?

Problema 2. De câte ori Pinocchio spune o minciună, nasul său creşte cu 1 cm. Când Pinocchio spune adevărul, nasul său se scurtează cu 2 mm. Pentru a nu rămâne fără nas, Pinocchio este foarte atent să nu spună adevărul dacă nasul său a ajuns să aibă 2 mm. După ce a făcut 2015 afirmaţii, Pinocchio a constatat că nasul i s-a lungit cu 5 cm. Câte minciuni a spus Pinocchio?

Problema 3. În jurul unei mese rotunde stau şase persoane. Unele spun mereu adevărul, celelalte spun mereu minciuni. Referindu-se la cele două persoane între care este aşezată la masă, fiecare din cele şase persoane de la masă declară

„Exact unul din cei doi vecini ai mei este mincinos.”

Câţi mincinoşi pot fi printre cele şase persoane de la masă?

Problema 4. Numim *palindrom* un număr care se citeşte la fel de la dreapta la stânga ca şi de la stânga la dreapta. De exemplu, 8970798, 3443 şi 7 sunt palindromuri.
a) Găsiţi toate scrierile posibile ale lui 108 ca suma a două palindromuri.
b) Găsiţi toate scrierile posibile ale lui 123 ca suma a două palindromuri.
c) Arătaţi că orice număr de forma $\overline{1ab}$ care este divizibil cu 11 se poate scrie ca sumă de două palindromuri în cel puţin trei moduri.
d) Demonstraţi că un număr de forma $\overline{1ab}$ care nu este divizibil cu 11 se poate scrie ca sumă de două palindromuri în cel mult două moduri.
(Două scrieri care diferă numai prin ordinea termenilor vor fi considerate o singură dată.)

Timp de lucru: 2 ore + 30 min pentru întrebări

Inspectoratul şcolar judeţean Caraş-Severin

Universitatea de Vest din Timişoara
Facultatea de Matematică şi Informatică

Concursul interjudeţean de matematică "Traian Lalescu"
Ediţia a XXIX-a
Reşiţa, 20-22 martie 2015

clasa a VI-a

1. Veveriţele Chip şi Dale au descoperit săculeţul cu alune al lui Donald Duck şi au decis că alunele trebuie cărate în scorbura lor. Ele au mers pe rând la săculeţ şi au luat câteva alune pe care le-au dus la scorbură, apoi s-au întors după altele, repetând acest du-te-vino de mai multe ori.
Prima a fost Chip, care a luat din săculeţ o alună, apoi Dale a luat două alune. Luându-se la întrecere, la întoarcere Chip a luat trei alune, apoi Dale patru, ş.a.m.d., de fiecare dată fiecare luând cu câte o alună mai mult decât cealaltă, până când au golit săculeţul (atunci când în sac au rămas mai puţine alune decât ar fi urmat să ia, ultima veveriţă le-a luat pe toate).
La sfârşit au constatat că una dintre ele a cărat la scorbură 111 alune. Care veveriţă a cărat mai multe alune? (Justificaţi răspunsul!)

2. Aflaţi cel mai mare element al mulţimii:

$$M = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ are cifrele distincte, iar } 9n \text{ are cifrele egale}\}.$$

3. Un număr natural este "cool" dacă se divide cu cubul sumei cifrelor sale. De exemplu 200 este un număr cool, deoarece se divide cu 8 $(= (2 + 0 + 0)^3)$.
a) Demonstraţi că dacă un număr cool se divide cu 3, atunci el se divide cu 729.
b) Găsiţi un număr cool de forma 800...01 (care are prima cifră 8, ultima cifră 1, iar restul cifrelor 0).
c) Există $n \in \mathbb{N}$ astfel încât atât n cât şi $n + 1$ să fie numere cool?

4. Bisectoarele $[BD]$, $[CE]$ şi înălţimea $[AM]$ ale triunghiului ABC $(D \in (AC), E \in (AB), M \in (BC))$ sunt concurente. Notăm cu P intersecţia dreptelor AM şi DE. Demonstraţi că:
a) $[MA$ este bisectoarea unghiului $\angle DME$.
b) P este mijlocul segmentului $[DE]$.

Subiect elaborat de conf. univ. dr. Dorel Miheţ

Timp de lucru: 2 ore + 30 min pentru întrebări

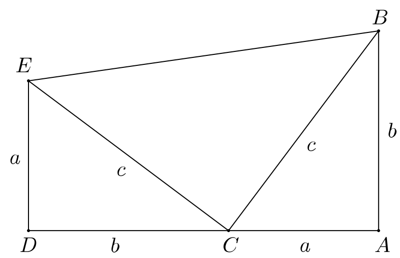
Inspectoratul şcolar judeţean Caraş-Severin

Universitatea de Vest din Timişoara
Facultatea de Matematică şi Informatică

Concursul interjudeţean de matematică "Traian Lalescu"
Ediţia a XXIX-a
Reşiţa, 20-22 martie 2015

clasa a VII-a

1. În figura de mai jos ABC şi CDE sunt triunghiuri dreptunghice congruente, care au catetele $[AC]$ şi $[DE]$ de lungime a, catetele $[AB]$ şi $[DC]$ de lungime b şi ipotenuzele de lungime c.
Exprimând aria trapezului $ABED$ ca sumă a ariilor triunghiurilor ABC, CDE şi BCE, deduceţi teorema lui Pitagora.



2. În drum spre şcoală Andrei şi Cristi, olimpicii clasei a VII-a A, au avut următorul dialog (din care au fost omise intenţionat câteva detalii):
,,A: Ştiai că numărul 2^{29} are cifrele distincte?
C: Nu, nu ştiam. Înseamnă că mulţimea cifrelor lui 2^{29} este ...
A: Ai dreptate! Cum ai reuşit să afli cifrele atât de repede?
C: $2^{10} = 1024$, deci 2^{29} are cel puţin 9 cifre. Având cifrele distincte, am dedus că el are ... . Apoi am aflat restul împărţirii ..."
Puneţi-vă în locul lui Cristi: deduceţi (fără a calcula 2^{29}) care este mulţimea cifrelor numărului 2^{29} şi explicaţi-i lui Andrei cum aţi găsit această mulţime, argumentând fiecare afirmaţie.

3. Fie M mulţimea tuturor numerelor de forma

$$x_1x_2 + x_3x_4 + x_5x_6 + \ldots + x_{2015}x_{2016},$$

unde $x_1, x_2, \ldots, x_{2015}, x_{2016} \in \{\sqrt{2}-1, \sqrt{2}+1\}$.
a) Demonstraţi că 1012 şi 2016 sunt elemente ale lui M.
b) Câte elemente are mulţimea $M \cap \mathbb{Q}$?

4. Se consideră trapezul $ABCD$, cu $AB \| CD$ şi $AB > CD$.
a) Fie E un punct pe (AB) şi $DE \cap AC = \{P\}$, $CE \cap BD = \{Q\}$. Demonstraţi că $PQ \| AB$ dacă şi numai dacă E este mijlocul lui $[AB]$.
b) Folosind doar o riglă negradată, construiţi un segment $[XT]$, cu $X \in (AD), T \in (BC)$, care să fie împărţit de diagonalele trapezului în trei părţi egale (dacă $[XT] \cap [AC] = \{Y\}$, $[XT] \cap [BD] = \{Z\}$, atunci $XY = YZ = ZT$).

Subiect elaborat de conf. univ. dr. Dorel Miheţ

Timp de lucru: 3 ore

Inspectoratul şcolar judeţean Caraş-Severin

Universitatea de Vest din Timişoara
Facultatea de Matematică şi Informatică

Concursul interjudeţean de matematică "Traian Lalescu"
Ediţia a XXIX-a
Reşiţa, 20-22 martie 2015

clasa a VIII-a

1. Un plan π intersectează muchiile laterale ale unei piramide patrulatere regulate $VABCD$ în punctele $M \in (VA)$, $N \in (VB)$, $P \in (VC)$ şi $Q \in (VD$, astfel încât

$$\frac{VM}{MA} = 21, \quad \frac{VN}{NB} = 3, \quad \frac{VP}{PC} = 2015.$$

Determinaţi valoarea raportului

$$\frac{VQ}{QD}.$$

2. a) Arătaţi că pentru orice numere pozitive a, b are loc inegalitatea

$$\frac{a^3+b^3}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^3.$$

b) Fie $a, b, c > 0$ cu proprietatea că $abc = 2015$. Arătaţi că

$$\frac{(a+b)^2}{a^3+b^3} + \frac{(a+c)^2}{a^3+c^3} + \frac{(b+c)^2}{b^3+c^3} \leq \frac{2(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})}{\sqrt{2015}}.$$

3. Fie mulţimile $A = \{31a + 65b |\, a, b \in \mathbb{Z}\}$, $B = \{31a + 65b |\, a, b \in \mathbb{N}^*\}$ şi $C = \{13a + 31b |\, a, b \in \mathbb{N}\}$.
a) Arătaţi că $A = \mathbb{Z}$.
b) Arătaţi că $2015 \notin B$, dar $\mathbb{N} \cap [2016, \infty) \subseteq B$.
c) Determinaţi $max(\mathbb{N} \setminus C)$.

4. Fie $ABCD$ un patrulater inscriptibil, $I \in AC \cap BD$ - intersecţia diagonalelor sale, iar $P \notin (ABC)$ un punct oarecare.
a) Exprimaţi lungimea segmentului $[AI]$ în funcţie de cele ale laturilor şi diagonalelor patrulaterului $ABCD$.
b) Arătaţi că

$$\frac{AC}{AB \cdot AD + CB \cdot CD} = \frac{BD}{BA \cdot BC + DA \cdot DC}.$$

c) Arătaţi că

$$PA^2 \cdot \frac{CI}{AC} + PC^2 \cdot \frac{AI}{AC} = PB^2 \cdot \frac{DI}{BD} + PD^2 \cdot \frac{BI}{BD}.$$

d) Arătaţi că

$$PA^2 \cdot \mathcal{A}(BCD) + PC^2 \cdot \mathcal{A}(ABD) = PB^2 \cdot \mathcal{A}(ACD) + PD^2 \cdot \mathcal{A}(ABC).$$

Notă: Timp de lucru - 3 ore

Problema 1. Câte din submulţimile nevide ale lui $A = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ au produsul elementelor divizibil cu 4?

Soluţia 1:

Pentru a avea produsul elementelor divizibil cu 4, submulţimile căutate trebuie fie să îl conţină pe 4, fie, dacă nu îl conţin pe 4, atunci să conţină şi pe 2 şi pe 6. .... **3p**
Sunt 16 submulţimi care îl conţin pe 4. .... **1p**
Sunt 4 submulţimi care conţin şi pe 2 şi pe 6, dar nu şi pe 4. .... **1p**
În final, găsim $16 + 8 - 4 = 20$ de submulţimi cu proprietatea căutată. **2p**

Soluţia 2:

Se scriu cele 31 de submulţimi nevide ale lui A şi se verifică pe rând dacă au proprietatea dorită.

Barem la Soluţia 2:

Omiterea unei/unor submulţimi va fi depunctată cu cel puţin **2p** şi cu semnificativ mai mult dacă nu se vede niciun mod sistematic de enumerare a submulţimilor.

Problema 2. De câte ori Pinocchio spune o minciună, nasul său creşte cu 1 cm. Când Pinocchio spune adevărul, nasul său se scurtează cu 2 mm. Pentru a nu rămâne fără nas, Pinocchio este foarte atent să nu spună adevărul dacă nasul său a ajuns să aibă 2 mm. După ce a făcut 2015 afirmaţii, Pinocchio a constatat că nasul i s-a lungit cu 5 cm. Câte minciuni a spus Pinocchio?

Soluţia 1:

Creşterea de 5 cm a fost provocată de 5 minciuni, celelalte 2010 afirmaţii neavând niciun efect. **1p**
Observăm că 5 afirmaţii adevărate contrabalansează o minciună. **2p**
Dacă printre cele 2010 afirmaţii rămase am avea 335 de minciuni, am putea grupa cele 2010 afirmaţii rămase în grupe de 6: 5 afirmaţii adevărate cu o minciună. Efectul fiecărui grup de afirmaţii asupra nasului lui Pinocchio este 0. Sunt 335 de asemenea grupe, deci Pinocchio putea spune $5 + 335$ de minciuni. **2p**
Aceasta este şi singura variantă posibilă: mai multe minciuni ar duce la un nas mai lung, mai puţine minciuni, la un nas mai scurt. **2p**

Soluţia 2:

Fie M numărul minciunilor spuse de Pinocchio. Celelalte $2015 - M$ afirmaţii ale sale au fost adevărate, deci nasul lui Pinocchio a crescut cu $10M$ milimetri şi s-a micşorat în total cu $2(2015 - M)$ milimetri. **4p**
Avem aşadar $10M - 2(2015 - M) = 50$, de unde $M = 340$. Aşadar, Pinocchio a spus 340 de minciuni. **3p**

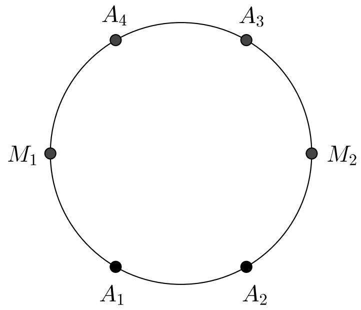
Problema 3. În jurul unei mese rotunde stau şase persoane. Unele spun mereu adevărul, celelalte spun mereu minciuni. Referindu-se la cele două persoane între care este aşezată la masă, fiecare din cele şase persoane de la masă declară

,,Exact unul din cei doi vecini ai mei este mincinos."

Câţi mincinoşi pot fi printre cele şase persoane de la masă?

Soluţie: La masă ar putea sta 6 mincinoşi: fiecare ar avea doi vecini mincinoşi şi afirmaţia ,,Exact unul din cei doi vecini ai mei este mincinos." ar fi o minciună pentru că fiecare din ei are nu unul, ci doi vecini mincinoşi. Aşadar, la masă ar putea sta 6 mincinoşi. **2p**
Dacă la masă nu sunt doar mincinoşi, ne uităm la o persoană, A_1, care spune adevărul. Ea are un vecin mincinos, M_1, şi unul care spune adevărul, A_2. Vom arăta că singurele persoane care spun adevărul sunt A_1 şi A_2. A_2 are deja un vecin care spune adevărul, A_1 şi, cum afirmaţia făcută de el este adevărată, celalalt vecin al său trebuie să fie un mincinos, M_2. Acesta, M_2, are un vecin care spune adevărul. Dacă celalalt vecin ar fi un mincinos, atunci afirmaţia lui M_2 ar fi adevărată. Dar M_2 este mincinos, deci celălalt vecin al lu M_2 trebue să fie o persoană care spune adevărul, A_3. La fel, celălalt vecin al lui M_1 trebuie să fie o persoană care spune adevărul, A_4. Configuraţia găsită (vezi figura) verifică şi ea condiţiile din enunţ, deci este posibil şi ca printre

cele şase persoane de la masă să fie doi mininoşi. **5p**
În concluzie, la masă pot fi doi sau şase mincinoşi.



Problema 4. Numim *palindrom* un număr care se citeşte la fel de la dreapta la stânga ca şi de la stânga la dreapta. De exemplu, 8970798, 3443 şi 7 sunt palindromuri.
a) Găsiţi toate scrierile posibile ale lui 108 ca suma a două palindromuri.
b) Găsiţi toate scrierile posibile ale lui 123 ca suma a două palindromuri.
c) Arătaţi că orice număr de forma $\overline{1ab}$ care este divizibil cu 11 se poate scrie ca sumă de două palindromuri în cel puţin trei moduri.
d) Demonstraţi că un număr de forma $\overline{1ab}$ care nu este divizibil cu 11 se poate scrie ca sumă de două palindromuri în cel mult două moduri.
(Două scrieri care diferă numai prin ordinea termenilor vor fi considerate o singură dată.)

Soluţie:
a) Numărul 108 nu se poate scrie ca suma a două palindromuri de câte două cifre pentru că o asemenea sumă, $\overline{aa} + \overline{bb} = 11(a + b)$ este divizibilă cu 11 pe când 108 nu este. Dacă unul din palindromuri este de trei cifre, el poate fi numai 101. Obţinem $108 = 101 + 7$. Mai sunt posibile scrieri de forma $a + \overline{bb}$. Trebuie $b = 9$ şi atunci $a = 9$: $108 = 9 + 99$. În concluzie, $108 = 101 + 7 = 99 + 9$. **1p**
b) Numărul 123 nu se poate scrie ca suma a două palindromuri de câte două cifre pentru că o asemenea sumă, $\overline{aa} + \overline{bb} = 11(a + b)$ este divizibilă cu 11 pe când 123 nu este. Dacă unul din palindromuri este de trei cifre, el poate fi numai 101, 111 sau 121. Obţinem $123 = 101 + 22$ şi $123 = 121 + 2$. Nu sunt posibile scrieri de forma $123 = a + \overline{bb} < 10 + 100 = 110$. **1p**
c) Multiplii de 11 de forma $\overline{1ab}$ sunt 110, 121, 132, 143, 154, 165, 176, 187 şi 198. Fiecare din aceste numere se scrie ca sumă de două palindromuri în cel puţin trei moduri. Prezentăm mai jos toate scrierile posibile. (Pentru fiecare din aceste numere este însă suficientă prezentarea a trei asemenea scrieri.) $110 = 11 + 99 = 22 + 88 = 33 + 77 = 44 + 66 = 55 + 55 = 101 + 9$; $121 = 22 + 99 = 33 + 88 = 44 + 77 = 55 + 66 = 121 + 0$; $132 = 33 + 99 = 44 + 88 = 55 + 77 = 66 + 66 = 131 + 1 = 121 + 11$; $143 = 44 + 99 = 55 + 88 = 66 + 77 = 141 + 2 = 121 + 22$; $154 = 55 + 99 = 66 + 88 = 77 + 77 = 151 + 3 = 121 + 33$; $165 = 66 + 99 = 77 + 88 = 161 + 4 = 121 + 44$; $176 = 77 + 99 = 88 + 88 = 171 + 5 = 121 + 55$; $187 = 88 + 99 = 181 + 6 = 121 + 66$; $198 = 99 + 99 = 191 + 7 = 121 + 77$. **2p**
d) În funcţie de numărul de cifre al celor două palindromuri, sunt patru tipuri de scriere: $\overline{1c1} + \overline{dd}$, $99 + d$, $\overline{1c1} + d$ şi $\overline{cc} + \overline{dd}$. **1p**
Ultima scriere duce la o sumă $11c + 11d = 11(c + d)$ divizibilă cu 11, deci ea nu trebuie luată în calcul.
Dacă un număr de forma $\overline{1ab}$, nedivizibil cu 11, are o scriere de un anumit tip, acea scriere este unică, cifrele c, d fiind unic determinate. Cum $99 + d' < \overline{1c1} + \overline{dd}$, un număr nu poate avea atât scriere de forma $99 + d'$, cât şi scriere de forma $\overline{1c1} + \overline{dd}$, deci poate avea cel mult două scrieri. **2p**

Clasa a VI-a: SOLUŢII ŞI BAREME

1) Veveriţele Chip şi Dale au descoperit săculeţul cu alune al lui Donald Duck şi au decis că alunele trebuie cărate în scorbura lor. Ele au mers pe rând la săculeţ şi au luat câteva alune pe care le-au dus la scorbură, apoi s-au întors după altele, repetând acest du-te-vino de mai multe ori.

Prima a fost Chip, care a luat din săculeţ o alună, apoi Dale a luat două alune. Luându-se la întrecere, la întoarcere Chip a luat trei alune, apoi Dale patru, ş.a.m.d., de fiecare dată fiecare luând cu câte o alună mai mult decât cealaltă, până când au golit săculeţul (atunci când în sac au rămas mai puţine alune decât ar fi urmat să ia, ultima veveriţă le-a luat pe toate).

La sfârşit au constatat că una dintre ele a cărat la scorbură 111 alune. Care veveriţă a cărat mai multe alune? (Justificaţi răspunsul!)

Dorel Miheţ

Soluţie

Nu ştim care dintre veveriţe a dus la scorbură 111 alune. Vom analiza pe rând cele două posibilităţi:

a) *Chip a cărat 111 alune.*

În acest caz veveriţa care a golit săculeţul a fost Chip.

Într-adevăr, să observăm că suma unor numere impare consecutive începând cu 1 este pătrat perfect:

$$1 + 3 = 2^2,\ 1 + 3 + 5 = 9 = 3^2,\ 1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2...,$$

$$1 + 3 + 5 + ... + 19 = 100, 1 + 3 + 5 + ... + 21 = 121 = 11^2...$$

....1p

Cum Chip a cărat 111 alune, iar 111 nu este pătrat perfect, rezultă că ea a golit săculeţul, cărând pe rând $1, 3, 5, ..., 19, 11$ alune. 2p

La rândul ei, Dale a cărat $2 + 4 + 8 + ... + 20 = 2 \cdot \frac{10 \cdot 11}{2} = 110$ alune, deci Chip a cărat mai multe alune. 1p

b) *Dale a cărat 111 alune.*

În acest caz săculeţul a fost golit de Dale (în caz contrar ea ar fi cărat un număr par de alune).................................... 1p

Aşadar Dale a cărat pe rând 2, 4, ..., 20, 1 alune, iar Chip 1, 3, 5, 7, 9, ..., 19, 21 alune. Deci Chip a adus la scorbură 121 alune. 2p

Răspuns: cea mai ”harnică” veveriţă a fost Chip.

2) Aflaţi cel mai mare element al mulţimii:

$$M = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ are cifrele distincte, iar } 9n \text{ are cifrele egale}\}.$$

Dorel Miheţ

Soluţie

Fie n un număr arbitrar din M. Observăm că:

1) n are cel mult 10 cifre (deoarece are cifrele distincte), deci $9n$ are cel mult 11 cifre. 1p

2) $9n$ nu are toate cifrele egale cu 9, deoarece atunci n are toate cifrele 1. . . . . 1p

Aşadar, dacă $n \in M$ atunci $9n \le \underbrace{88...8}_{9 \text{ cifre}}$, adică $n \le \frac{888888888}{9}$. 2p

Pe de altă parte, făcând împărţirea 888888888 : 9 obţinem numărul 98765432 . . . . 1p.

Cum numărul 98765432 are cifrele distincte, el aparţine mulţimii M, deci este cel mai mare element al acestei mulţimi. 1p

3) Un număr natural este "cool" dacă se divide cu cubul sumei cifrelor sale. De exemplu 200 este un număr cool, deoarece se divide cu 8 $(= (2+0+0)^3)$.

a) Demonstraţi că dacă un număr cool se divide cu 3, atunci el se divide cu 729.

b) Găsiţi un număr cool de forma 800...01 (care are prima cifră 8, ultima cifră 1, iar restul cifrelor 0).

c) Există $n \in \mathbb{N}$ astfel încât atât n cât şi $n+1$ să fie numere cool?

Dorel Miheţ

Soluţie

a) Fie n un număr cool şi $s(n)$ suma cifrelor sale. Dacă n se divide cu 3, atunci $s(n)$ se divide cu 3, şi cum n se divide cu $s(n)^3$, el se va divide cu 27. . . . . 1p

În particular, n se divide cu 9, deci $s(n)$ se divide cu 9. . . . . 1p

Aşadar n se divide cu $9^3 = 729$. 1p

b) Efectuăm succesiv împărţirile:

$$801 : 729;\ 8001 : 729;\ 80001 : 729;\ ...;\ 80000000001 : 729.$$

Ultima împărţire se face exact, câtul fiind 109739369. . . . . 2p

c) De la b) ştim că 80000000001 (cu 9 cifre de 0) este număr cool. Cum numărul 80000000000 $(=2^{13} \cdot 5^{10})$ se divide cu $8^3 = 2^9$, rezultă că $n = 80000000000$ şi $n+1 = 80000000001$ sunt numere cool. 2p

4) Bisectoarele $[BD]$, $[CE]$ şi înălţimea $[AM]$ ale triunghiului ABC $(D \in (AC), E \in (AB), M \in (BC))$ sunt concurente. Notăm cu P intersecţia dreptelor AM şi DE. Demonstraţi că:

a) $[MA$ este bisectoarea unghiului $\angle DME$.

b) P este mijlocul segmentului $[DE]$.

***

Soluţie

a) Din faptul că bisectoarele unui triunghi sunt concurente deducem că $\angle BAM \equiv \angle CAM$: dacă I este punctul de intersecţie a bisectoarelor

$[BD]$ şi $[CE]$, atunci $[AI)$ este bisectoarea unghiului A al triunghiului ABC, deci $[AM]$ este cea de-a treia bisectoare. 1p

Rezultă că $\triangle AMB \equiv \triangle AMC$ (CU). 1p

Acum putem demonstra că $[MA$ este bisectoarea unghiului $\angle DME$ în mai multe moduri:

Metoda I. Încadrăm unghiurile $\angle EMA$ şi $\angle DMA$ în $\triangle AEM$ şi $\triangle ADM$, despre care arătăm că sunt congruente.

$\triangle AMB \equiv \triangle AMC \Rightarrow AB = AC, m(\angle ABC) = m(\angle ACB)$ 1p

Observăm apoi că $\triangle BEC \equiv \triangle CDB$ (ULU), deci $BE = CD$ ... 1p

Rezultă că $EA = AD$ (diferenţă de segmente congruente), deci $\triangle AEM \equiv \triangle ADM$ (LUL) 1p

Din această congruenţă deducem că $\angle EMA \equiv \angle DMA$ 1p

Metoda a II-a. Din $\triangle AMB \equiv \triangle AMC$ rezultă că $BM = MC$ şi $m(\angle ABC) = m(\angle ACB)$ 1p

Rezultă că $\triangle BEC \equiv \triangle CDB$ (ULU), deci $BE = CD$ 1p

Atunci $\triangle BME \equiv \triangle CMD$ (LUL), deci $\angle BME \equiv \angle CMD$...... 1p

Complementele acestor unghiuri sunt şi ele egale, deci $\angle EMA \equiv \angle DMA$ 1p

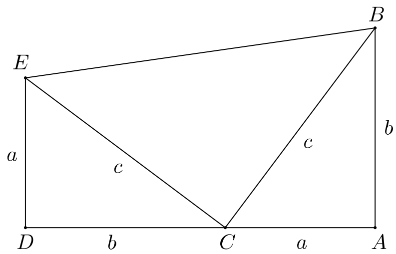
b) $\triangle AEP \equiv \triangle ADP$ (LUL), deci $EP = DP$. 1p

Observaţie. Proprietatea de la a) are loc chiar dacă $[BD]$ şi $[CE]$ sunt ceviene oarecare care se intersectează pe înălţimea din A.

Clasa a VII-a: SOLUŢII şi BAREME

1) În figura de mai jos ABC şi CDE sunt triunghiuri dreptunghice congruente, care au catetele $[AC]$ şi $[DE]$ de lungime a, catetele $[AB]$ şi $[DC]$ de lungime b şi ipotenuzele de lungime c.

Exprimând aria trapezului $ABED$ ca sumă a ariilor triunghiurilor ABC, CDE şi BCE, deduceţi teorema lui Pitagora.



Folclor

Soluţie

Din congruenţa celor două triunghiuri rezultă

$$m(\angle DCE) + m(\angle ACB) = m(\angle DCE) + m(\angle DEC) = 90^\circ,$$

deci $\triangle BCE$ este dreptunghic isoscel. 2p

Aria trapezului $ABED$ este $\mathcal{A}_{ABED} = \frac{(AB+DE)\cdot AD}{2} = \frac{(a+b)^2}{2}$. 1p

Pe de altă parte,

$$\mathcal{A}_{ABED} = \mathcal{A}_{ABC} + \mathcal{A}_{CDE} + \mathcal{A}_{BCE} = 2 \cdot \frac{ab}{2} + \frac{c^2}{2}$$

. . . . 2p

Aşadar $a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2$, adică $a^2 + b^2 = c^2$ 2p

(Această demonstraţie a teoremei lui Pitagora îi aparţine lui James A. Garfield, al 20-lea Preşedinte al SUA.)

2) În drum spre şcoală Andrei şi Cristi, olimpicii clasei a VII-a A, au avut următorul dialog (din care au fost omise intenţionat câteva detalii):

,,A: Ştiai că numărul 2^{29} are cifrele distincte?

C: Nu, nu ştiam. Înseamnă că mulţimea cifrelor lui 2^{29} este ...

A: Ai dreptate! Cum ai reuşit să afli cifrele atât de repede?

C: $2^{10} = 1024$, deci 2^{29} are cel puţin 9 cifre. Având cifrele distincte, am dedus că el are ... . Apoi am aflat restul împărţirii ...”

Puneţi-vă în locul lui Cristi: deduceţi (fără a calcula 2^{29}) care este mulţimea cifrelor numărului 2^{29} şi explicaţi-i lui Andrei cum aţi găsit această mulţime, argumentând fiecare afirmaţie.

Dorel Miheţ

Soluţie

Vom arăta că mulţimea cifrelor lui 2^{29} este $\{0, 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Urmând raţionamentul lui Cristi, această mulţime poate fi dedusă astfel:

1. $2^{10} = 1024$, deci 2^{29} are cel puţin 9 cifre.

Într-adevăr: $2^{29} = 2^{10} \cdot 2^{10} \cdot 2^9 > 1000 \cdot 1000 \cdot 500 = 5 \cdot 10^8$.

2. Având cifrele distincte, 2^{29} are exact 9 cifre. Într-adevăr:

- un număr cu cifre distincte are cel mult 10 cifre 1p

- dacă ar avea 10 cifre, atunci acestea ar fi 0, 1, ... 9, deci 2^{29} ar fi multiplu de 9, ceea ce este absurd...2p

Trebuie deci să determinăm cifra care nu apare printre cifrele lui 2^{29}.

3. În acest scop aflăm restul împărţirii lui 2^{29} la 9.

Putem proceda de exemplu astfel: $2^{10} = 1024 = 9k - 2 \Rightarrow 2^{20} = \mu 9 + 4$ şi $2^9 = 512 = \mu 9 - 1$. Deci $2^{29} = (\mu 9 + 4) \cdot (\mu 9 - 1) = \mu 9 - 4$ 2p

(Altfel: $2^{29} = 2^2 \cdot 2^{27} = 4 \cdot 8^9 = 4 \cdot (9-1)^9 = 4(9k-1) = 9l - 4$)

4. $0 + 1 + \ldots + 9 = 45$ se divide cu 9. Pentru a obţine un multiplu de 9 minus 4 trebuie deci să eliminăm cifra 4. ....2p

Observaţie: $2^{29} = 536870912$.

3) Fie M mulţimea tuturor numerelor de forma

$$x_1x_2 + x_3x_4 + x_5x_6 + \ldots + x_{2015}x_{2016},$$

unde $x_1, x_2, \ldots, x_{2015}, x_{2016} \in \{\sqrt{2}-1, \sqrt{2}+1\}$.

a) Demonstraţi că 1012 şi 2016 sunt elemente ale lui M.

b) Câte elemente are mulţimea $M \cap \mathbb{Q}$?

Olimpiadă Brazilia (adaptare)

Soluţie

a) Suma are 1008 termeni, fiecare termen fiind sau $(\sqrt{2}-1)^2 = 3 - 2\sqrt{2}$, sau $(\sqrt{2}+1)^2 = 3 + 2\sqrt{2}$, sau $(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1) = 1$ 1p

$$1012 = (\sqrt{2}-1)^2 + (\sqrt{2}+1)^2 + \underbrace{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1) + \ldots + (\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}_{1006\ \textit{termeni}}$$

....1p

Deoarece $(\sqrt{2}-1)^2 + (\sqrt{2}+1)^2 = 6$, pentru a obţine 2016 vom folosi k sume $(\sqrt{2}-1)^2 + (\sqrt{2}+1)^2$ şi $1008 - 2k$ numere $(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)$.

Din $6k + 1008 - 2k = 2016$ obţinem $k = 252$, deci

$$2016 = \underbrace{[(\sqrt{2}-1)^2 + (\sqrt{2}+1)^2] + \ldots + [(\sqrt{2}-1)^2 + (\sqrt{2}+1)^2]}_{252\ \textit{termeni}} +$$

$$\underbrace{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1) + \ldots + (\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}_{504\ \textit{termeni}} \in M$$

....2p

b) Fie $a \in M$. Atunci a este suma a k numere $3 - 2\sqrt{2}$, l numere $3 + 2\sqrt{2}$ şi $1008 - (k+l)$ de 1, unde $k, l \geq 0$ şi $k + l \leq 1008$, deci

$$a = k(3 - 2\sqrt{2}) + l(3 + 2\sqrt{2}) + 1008 - (k+l) = 1008 + 2(k+l) + 2(l-k)\sqrt{2}$$

....1p

Deci a este raţional dacă şi numai dacă $l = k$. 1p

Cum $0 \leq k \leq 504$, $M \cap \mathbb{Q} = \{1008 + 4k \mid 0 \leq k \leq 504\}$, deci $M \cap \mathbb{Q}$ are 505 elemente. 1p

4) Se consideră trapezul $ABCD$, cu $AB \| CD$ şi $AB > CD$.

a) Fie E un punct pe (AB) şi $DE \cap AC = \{P\}$, $CE \cap BD = \{Q\}$. Demonstraţi că $PQ \| AB$ dacă şi numai dacă E este mijlocul lui $[AB]$.

b) Folosind doar o riglă negradată, construiţi un segment $[XT]$, cu $X \in (AD), T \in (BC)$, care să fie împărţit de diagonalele trapezului în trei părţi egale (dacă $[XT] \cap [AC] = \{Y\}, [XT] \cap [BD] = \{Z\}$, atunci $XY = YZ = ZT$).

Dorel Miheţ

Soluţie

a) Din $AB \| CD$ rezultă $\frac{AE}{DC} = \frac{PE}{PD}$ şi $\frac{EB}{DC} = \frac{QE}{QC}$. 2p

Pe de altă parte, $PQ \| AB \Leftrightarrow PQ \| DC$, iar din teorema lui Thales şi reciproca sa,

$$PQ \| DC \Leftrightarrow \frac{PE}{PD} = \frac{QE}{QC}.$$

. . . . 2p

Deci $AE = EB \Leftrightarrow PQ \| AB$.

(Dacă se demonstrează separat implicaţiile $AE = EB \Rightarrow PQ \| AB$ şi $PQ \| AB \Rightarrow AE = EB$, fiecare implicaţie se apreciază cu 2p)

b) Folosind teorema lui Steiner, construim cu rigla mijlocul lui $[AB]$: dacă $AD \cap BC = \{U\}$ şi $AC \cap BD = \{O\}$, atunci dreapta UO intersectează AB în mijlocul M al lui $[AB]$. 1p

Construim apoi cu rigla punctele Y, Z, $\{Y\} = DM \cap AC$, $\{Z\} = CM \cap BD$, după care punctele X, T, intersecţiile dreptei YZ cu AD şi BC. . . 1p

Segmentul $[XT]$ este împărţit de diagonale în trei părţi egale.

Într-adevăr, de la punctul a) ştim că $YZ \| AB$. Rezultă că

$$\frac{XY}{AM} = \frac{DY}{DM} = \frac{YZ}{MB}$$

deci $XY = YZ$, şi la fel $YZ = ZT$. 1p

Inspectoratul şcolar judeţean Caraş-Severin

Universitatea de Vest din Timişoara
Facultatea de Matematică şi Informatică

Concursul interjudeţean de matematică "Traian Lalescu"
Ediţia a XXIX-a
Reşiţa, 20-22 martie 2015

Soluţii şi barem la clasa a VIII-a

1. Un plan π intersectează muchiile laterale ale unei piramide patrulatere regulate $VABCD$ în punctele $M \in (VA)$, $N \in (VB)$, $P \in (VC)$ şi $Q \in (VD$, astfel încât

$$\frac{VM}{MA} = 21, \quad \frac{VN}{NB} = 3, \quad \frac{VP}{PC} = 2015.$$

Determinaţi valoarea raportului

$$\frac{VQ}{QD}.$$

Barem de corectare:

consideră punctele $X \in MN \cap AB$ şi $Y \in NP \cap BC$, aplică Teorema lui Menelaos şi obţine rapoartele $\frac{AX}{BX}$ şi $\frac{BY}{CY}$	3p
consideră $Z \in XY \cap AD$, foloseşte asemănarea $\Delta XAZ \sim \Delta XBY$ şi determină $\frac{AZ}{DZ}$	2p
aplică din nou Teorema lui Menelaos şi obţine $\frac{VQ}{QD}$	2p
total	**7p**

2. a) Arătaţi că pentru orice numere pozitive a, b are loc inegalitatea

$$\frac{a^3+b^3}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^3.$$

b) Fie $a, b, c > 0$ cu proprietatea că $abc = 2015$. Arătaţi că

$$\frac{(a+b)^2}{a^3+b^3} + \frac{(a+c)^2}{a^3+c^3} + \frac{(b+c)^2}{b^3+c^3} \leq \frac{2(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})}{\sqrt{2015}}.$$

Barem de corectare:

a) transformă şi reduce la $(a-b)^2 \geq 0$	2p
b) aplică a) şi obţine $\sum \frac{(a+b)^2}{a^3+b^3} \leq \sum \frac{4}{a+b}$	2p
aplică inegalitatea mediilor şi restricţia: $\sum \frac{4}{a+b} \leq \sum \frac{2}{\sqrt{ab}} \leq \frac{2(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})}{\sqrt{abc}} = \frac{2(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})}{\sqrt{2015}}$	3p
total	**7p**

3. Fie mulţimile $A = \{31a + 65b \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$, $B = \{31a + 65b \mid a, b \in \mathbb{N}^*\}$ şi $C = \{13a + 31b \mid a, b \in \mathbb{N}\}$.
a) Arătaţi că $A = \mathbb{Z}$.

b) Arătaţi că $2015 \notin B$, dar $\mathbb{N} \cap [2016, \infty) \subseteq B$.
c) Determinaţi $max(\mathbb{N} \setminus C)$.

Barem de corectare:

a) foloseşte că $(31, 65) = 1 \Longleftrightarrow (\exists)u, v \in \mathbb{Z} : 31u + 65v = 1$	1p
şi deduce că $k = 31uk + 65vk \in A, (\forall)k \in \mathbb{Z}$, de unde obţine că $A = \mathbb{Z}$	1p
b) arată că $2015 = 31a + 65b \Longrightarrow 31 \mid 65b \Longrightarrow 31 \mid b \Longrightarrow 65b \geq 2015 = 31a + 65b > 2015$	1p
arată că $(\forall)k \in \{1, 2, \ldots, 30\}(\exists)q_k \in \{1, 2, \ldots, 64\}, r_k \in \{1, 2, \ldots, 30\} : 65k = 31q_k + r_k$, cu $r_k \neq r_l, (\forall)k \neq l$	
şi deduce că $(\forall)r \in \{1, 2, \ldots, 30\}(\exists)k \in \{1, 2, \ldots, 30\}, q \in \{1, 2, \ldots, 64\} : r = 65k - 31q$	1p
pentru $n \geq 2016$ şi $n = 31m + r(m \geq 65)$, avem că $n = 65k + 31(m - q)$(dacă $r \neq 0$)	
resp. $n = 31(m - 65) + 65 \cdot 31$(dacă $r = 0$)	1p
c) considerând $C' = \{13a + 31b \mid a, b \in \mathbb{N}^*\}$ se obţine(analog cu b)) că $max(N \setminus C') = 13 \cdot 31 = 403$	1p
dar $C' = 13 + 31 + C$, astfel că $max(\mathbb{N} \setminus C) = 13 \cdot 31 - 34 = 369$.	1p
total	**7p**

4. Fie $ABCD$ un patrulater inscriptibil, $I \in AC \cap BD$ - intersecţia diagonalelor sale, iar $P \notin (ABC)$ un punct oarecare.
a) Exprimaţi lungimea segmentului $[AI]$ în funcţie de cele ale laturilor şi diagonalelor patrulaterului $ABCD$.
b) Arătaţi că

$$\frac{AC}{AB \cdot AD + CB \cdot CD} = \frac{BD}{BA \cdot BC + DA \cdot DC}.$$

c) Arătaţi că

$$PA^2 \cdot \frac{CI}{AC} + PC^2 \cdot \frac{AI}{AC} = PB^2 \cdot \frac{DI}{BD} + PD^2 \cdot \frac{BI}{BD}.$$

d) Arătaţi că

$$PA^2 \cdot \mathcal{A}(BCD) + PC^2 \cdot \mathcal{A}(ABD) = PB^2 \cdot \mathcal{A}(ACD) + PD^2 \cdot \mathcal{A}(ABC).$$

Barem de corectare:

a) din asemănările $\Delta IAB \sim \Delta IDC$ şi $\Delta IAD \sim \Delta IBC$ obţine $AI = BD \cdot \frac{AB \cdot AD}{BA \cdot BC + DA \cdot DC}$	2p
b) adunând AI şi CI obţine egalitatea	1p
c) foloseşte relaţia lui Stewart pentru PI^2 în ΔPAC şi ΔPBD	
şi $AI \cdot CI = BI \cdot DI$ şi obţine egalitatea	2p
d) înmulţeşte egalitatea precedentă cu $AC \cdot BD \cdot sin(\widehat{AIB})$ şi obţine egalitatea	2p
total	**7p**