Universitatea de Vest din Timişoara
Inspectoratul Şcolar Judeţean Arad

Concursul Interjudeţean de Matematică Memorialul "Traian Lalescu"

Ediţia a XXXI-a, Arad, 31 martie - 2 aprilie 2017

Clasa a V-a

1. Dat n un număr natural nenul, vom nota prin $n!$ produsul $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ (spre exemplu, $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$). Determinaţi numerele naturale $\overline{abc}$ cu $a, b, c \neq 0$, având proprietatea că $\overline{abc} = a! + b! + c!$.

2. Literele A, B, C, D, E, F, G, H şi I notează numerele naturale de la 1 la 9 într-o anumită ordine. Dacă

$$A + B + C = C + D + E = E + F + G = G + H + I$$

şi suma acestor patru numere egale este cea mai mare posibilă, aflaţi valoarea lui E.

3. Alin are o ascunzătoare secretă în care a strâns 35 monede, 38 cartonaşe cu fotbalişti şi 39 bomboane. Fratele lui mai mic, Cosmin, are propria ascunzătoare secretă în care strânge monede, cartonaşe cu fotbalişti şi bomboane, dar asta nu îl împiedică să "împrumute" şi din lucrurile lui Alin. De fiecare dată, Cosmin ia de la Alin două obiecte de tipuri diferite (aşa încât numărul lor să nu scadă prea repede şi fratele său să observe) şi pune înapoi un obiect de al treilea tip. După o vreme, Alin îşi vizitează ascunzătoarea şi constată că toate obiectele care se mai află acolo sunt de acelaşi tip. Ce fel de obiecte i-au mai rămas?

4. Din şirul numerelor naturale $0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$ se elimină toate numerele care conţin cifrele 3, 6 sau 9. Pe ce poziţie în şirul rămas se va afla 2017?

Timp de lucru: 3 ore

Universitatea de Vest din Timişoara
Inspectoratul Şcolar Judeţean Arad

Concursul Interjudeţean de Matematică Memorialul "Traian Lalescu"

Ediţia a XXXI-a, Arad, 31 martie - 2 aprilie 2017

Clasa a VI-a

1. Mulţimea numerelor naturale pozitive se împarte în grupe astfel:

$$1; 2, 3; 4, 5, 6; 7, 8, 9, 10; 11, 12, 13, 14, 15; 16, 17, 18, 19, 20, 21; ...$$

(prima grupă conţine primul număr, a doua următoarele două, a treia următoarele trei, ş.a.m.d.). Scriind numerele din fiecare grupă în ordine, unul după altul şi fără spaţii între ele, se obţine şirul de numere: 1, 23, 456, 78910, 1112131415, 161718192021, ...

a) Cu ce cifră se termină cel de-al 100-lea număr din şir?

b) Care este numărul din şir în care apare pentru prima oară secvenţa 2017? De exemplu, secvenţa 121 apare pentru prima oară în al cincilea număr: 11**121**31415.

2. Spunem că un număr natural n este superdivizibil dacă se divide cu fiecare din cifrele sale. De exemplu, 936 este superdivizibil. Notăm cu $\mathcal{M}$ mulţimea numerelor superdivizibile de 6 cifre, care au ultima cifră egală cu 3.

a) Aflaţi cel mai mic şi cel mai mare număr din mulţimea $\mathcal{M}$.

b) Câte cifre distincte poate avea un număr din $\mathcal{M}$? De exemplu, un număr din $\mathcal{M}$ poate avea două cifre distincte, deoarece numărul 113133 aparţine mulţimii $\mathcal{M}$ şi are două cifre distincte.

3. Fie $\mathcal{A}$ mulţimea numerelor de 3 cifre $\overline{abc}$ cu următoarea proprietate: cifra a este egală cu numărul divizorilor de o cifră ai numărului $\overline{abc}$, cifra este b egală cu numărul divizorilor de două cifre ai numărului $\overline{abc}$, iar cifra c este egală cu numărul divizorilor de trei cifre ai numărului $\overline{abc}$. De exemplu, numărul 202 aparţine mulţimii $\mathcal{A}$ (divizorii lui 202 sunt 1, 2, 101 şi 202).

a) Câte numere prime conţine mulţimea $\mathcal{A}$?

b) Baronul Münchhausen afirmă că în mulţimea $\mathcal{A}$ există numere cu toate cifrele impare. Decideţi (cu justificare) dacă baronul are sau nu dreptate.

c) Aflaţi numerele din $\mathcal{A}$ care au toate cifrele pare.

4. Considerăm triunghiul ABC în care $m(\widehat{ABC}) = 30°$ şi $m(\widehat{ACB}) = 45°$. Mediatoarea laturii $[BC]$ intersectează bisectoarea unghiului $\widehat{ABC}$ în P şi latura $[AB]$ în Q. Demonstraţi că:

a) $[CP$ este bisectoarea unghiului $\widehat{BCQ}$.

b) $[BP] \equiv [AC]$.

Timp de lucru: 3 ore

Universitatea de Vest din Timişoara
Inspectoratul Şcolar Judeţean Arad

Concursul Interjudeţean de Matematică Memorialul ”Traian Lalescu”

Ediţia a XXXI-a, Arad, 31 martie - 2 aprilie 2017

Clasa a VII-a

1. Arătaţi, fără a extrage radicalii, că:
   (a) $\{7\sqrt{3}\} > \frac{3}{25}$;
   (b) $\{3\sqrt{7}\} > \frac{14}{15}$;
   (c) $[7\sqrt{3} + 3\sqrt{7}] = 20$.

2. Fie p un număr prim şi x un număr întreg astfel încât
$$p \mid x^{12} + x^9 + x^6 + x^3 + 1 \ .$$
   Demonstraţi că cel puţin unul dintre numerele
$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 \ , \ x^{10} + x^5 + 1$$
   este divizibil cu p.

3. Fie ABC un triunghi având lungimile laturilor AB=4, BC=20, AC=17. Notăm cu D piciorul bisectoarei unghiului $\widehat{BAC}$, cu E mijlocul segmentului AD, cu F intersecţia dreptelor AC şi BE. Calculaţi lungimile segmentelor (BD) şi (AF).

4. (a) Considerăm un triunghi ABC şi fie D un punct pe latura (BC). Se formează astfel 3 triunghiuri: ABC, ABD şi ACD. Demonstraţi că dacă cele 3 triunghiuri sunt asemenea între ele, atunci unghiul $\widehat{BAC}$ este drept şi $AD \perp BC$.
   (b) Considerăm un patrulater ABCD şi fie O intersecţia diagonalelor sale. Demonstraţi că dacă 7 dintre cele 8 triunghiuri formate sunt asemenea între ele, atunci toate cele 8 triunghiuri sunt asemenea între ele.

Timp de lucru: 3 ore

Universitatea de Vest din Timişoara
Inspectoratul Şcolar Judeţean Arad

Concursul Interjudeţean de Matematică Memorialul "Traian Lalescu"

Ediţia a XXXI-a, Arad, 31 martie 2017 - 2 aprilie 2017

Enunţuri

Clasa a VIII-a

Subiectul 1 Fie M şi N mijloacele muchiilor $[BB']$, respectiv $[CD]$, ale cubului $ABCDA'B'C'D'$.
a) Arătaţi că dreptele $A'M$ şi $C'N$ sunt perpendiculare.
b) Dacă PQ, cu $P \in A'M$ şi $Q \in C'N$, este perpendiculara comună a dreptelor $A'M$ şi $C'N$, aflaţi raportul $\dfrac{A'P}{PM}$.

Subiectul 2 **a)** Rezolvaţi ecuaţia

$$\left[\frac{x}{5}\right] + \left[\frac{x+1}{5}\right] + \left[\frac{x+2}{5}\right] + \left[\frac{x+3}{5}\right] + \left[\frac{x+4}{5}\right] + \left[\frac{x+5}{5}\right] = 2017.$$

b) Determinaţi mulţimea valorilor pe care le ia expresia

$$\left[\frac{x}{5}\right] + \left[\frac{x+1}{5}\right] + \left[\frac{x+2}{5}\right] + \left[\frac{x+3}{5}\right] + \left[\frac{x+4}{5}\right] + \left[\frac{x+5}{5}\right],$$

când $x \geq 0$.

Subiectul 3 Pe muchiile laterale ale cubului $ABCDA'B'C'D'$ de latură $2\,\text{m}$ se consideră punctele $P_1, P_5, \ldots, P_{97} \in [AA']$, $P_2, P_6, \ldots, P_{98} \in [BB']$, $P_3, P_7, \ldots, P_{99} \in [CC']$ şi $P_4, P_8, \ldots, P_{100} \in [DD']$ astfel încât $d\big(P_k, (ABCD)\big) = k\,\text{cm}$, oricare ar fi $k \in \{1, 2, \ldots, 100\}$.
Câte plane distincte determină cele 100 puncte?

Subiectul 4 Pentru $x, y, z \in [1, 3]$ notăm $E(x, y, z) = xyz + (4 - x)(4 - y)(4 - z)$.
a) Demonstraţi că $(x - 2)(y - 2) \leq 1 - |x - y|$, $\forall\, x, y \in [1, 3]$.
b) Folosind eventual subpunctul anterior, determinaţi maximul expresiei $E(x, y, z)$.
c) Arătaţi că $E(x, y, z) \geq \min\{E(x, y, 1),\ E(x, y, 3)\}$, $\forall\, x, y, z \in [1, 3]$.
d) Demonstraţi că $E(x, y, z) \geq 12$, $\forall\, x, y, z \in [1, 3]$. Când are loc egalitatea?

Timp de lucru: 3 ore

Universitatea de Vest din Timişoara
Inspectoratul Şcolar Judeţean Arad

Concursul Interjudeţean de Matematică Memorialul "Traian Lalescu"

Ediţia a XXXI-a, Arad, 31 martie - 2 aprilie 2017

Barem de corectare

Clasa a V-a

Subiectul 1

Start 1p

Deoarece $6! = 720$, prezenţa unei cifre mai mari sau egale cu 6 ar implica $\overline{abc} > 720$. În consecinţă, am avea $a \geq 7$, fapt imposibil deoarece $7! > 1000$. Obţinem deci $a, b, c \leq 5$. 3p

Vom avea $\overline{abc} \leq 5! + 5! + 5! = 360$, de unde $a \leq 3$ 1p

Dacă $a, b, c \leq 4$, atunci $\overline{abc} \leq 4! + 4! + 4! = 72$ - nu convine. Prin urmare, cel puţin una dintre cifrele b şi c va fi egală cu 5. .... 2p

Se analizează pe rând cazurile $a = 1, b = 5$; $a = 1, c = 5$; $a = 2, b = 5$; $a = 2, c = 5$; $a = 3, b = 5$ şi $a = 3, c = 5$. Se găseşte soluţia unică $a = 1, b = 4, c = 5$, deci $\overline{abc} = 145$ 3p

Subiectul 2

Start 1p

Deoarece numărul $A + B + C + C + D + E + E + F + G + G + H + I$ este suma a patru numere naturale egale, el va fi multiplu de 4. .... 1p

Avem $A + B + C + C + D + E + E + F + G + G + H + I = 45 + C + E + G$. 2p
Valoarea maximă a sumei se atinge pentru C, E şi G fiind 6, 8 şi 9, deci $A+B+C = C + D + E = E + F + G = G + H + I = 17$ 3p

Dacă $C = 6$ rezultă $E + G = 17$, deci $F = 0$ - nu convine. 1p
Dacă $C = 8$ rezultă $E = 6$, $G = 9$, deci $D = 3$, $F = 2$, şi $A + B = 9$, $H + I = 8$ (configuraţie care se poate obţine de exemplu cu $A = 4, B = 5, H = 1, I = 7$). ..1p
Dacă $C = 9$ rezultă $E = 6$, $G = 8$, deci $D = 2$, $F = 3$, şi $A + B = 8$, $H + I = 9$ (configuraţie care se poate obţine cu $A = 1, B = 7, H = 4, I = 5$). 1p

Subiectul 3

Start 1p

Fie m numărul de monede, c numărul de cartonaşe şi b numărul de bomboane aflate la un moment dat în ascunzătoare. Iniţial, $m + c = 73$, $m + b = 74$, $c + b = 77$. 2p

La fiecare vizită, una din aceste sume scade cu 2, în timp ce celelalte două nu se modifică. 4p

Deoarece $m + c$ şi $c + b$ sunt impare, singura sumă care poate ajunge la 0 după mai mulţi paşi este $m + b$, deci Alin va mai avea în final doar cartonaşe cu fotbalişti. 3p

Soluţie alternativă:

Start 1p

Dacă la un moment dat Alin are un număr par de obiecte de un anumit tip, după următoarea vizită numărul acestor obiecte va fi impar şi viceversa. 3p

După efectuarea unui anumit număr de vizite, sau m şi b vor fi pare şi c impar, sau m şi b vor fi impare şi c par. 3p

Situaţia ca două dintre numerele m, c şi b să fie simultan 0 se poate obţine doar dacă acestea sunt m şi b, deci c va fi impar şi prin urmare nenul. 3p

Subiectul 4

Start 1p

În cazul numerelor de cel mult trei cifre din şir există câte 7 posibilităţi pentru cifra unităţilor, zecilor şi sutelor, deci vom avea $7^3 = 343$ astfel de numere............ 4p

Deducem că în şir se vor afla 343 numere de patru cifre cu cifra miilor 1. ...... 2p

Între 2000 şi 2017 inclusiv mai sunt încă 13 numere cu proprietatea cerută. 2p

Prin urmare, 2017 se va afla pe poziţia $2 \cdot 343 + 13 = 699$. 1p

Notă: La fiecare subiect, *o soluţie corectă* (alta decât cea propusă în barem), *va fi punctată cu 10 p.*

Universitatea de Vest din Timişoara
Inspectoratul Şcolar Judeţean Arad

Concursul Interjudeţean de Matematică Memorialul ”Traian Lalescu”

Ediţia a XXXI-a, Arad, 31 martie - 2 aprilie 2017

Barem de corectare

Clasa a VI-a

Subiectul 1

Start 1p

a) Se cere de fapt ultima cifră a celui de-al (1+2+...+100)-lea număr natural. Cum $1+2+\ldots+100 = 5050$, această cifră este 0.................................... 3p

b) Secvenţa 2017 nu se poate obţine dintr-un număr terminat în 2, urmat de unul unul care începe cu 017, deci vom căuta numere din şir care conţin o succesiune dintre un număr care se termină în 20 şi unul care începe cu 17. Prima astfel de succesiune este 1720, 1721.. 3p

Deoarece $1+2+\ldots+58 = 1711$ şi $1+2+\ldots+59 = 1770$, succesiunea 1720, 1721 face parte din cel de-al 59-lea număr din şir. Răspuns: secvenţa 2017 apare pentru prima oară în numărul $17121713\ldots17201721\ldots1770$ (care este al 59-lea număr din şir).. 3p

Subiectul 2

Start 1p

a) Numerele din $\mathcal{M}$ sunt impare, deci nu au niciun divizor par şi deoarece sunt superdivizibile, toate cifrele lor sunt impare. De asemenea, ele nu conţin cifra 5, deoarece nu se divid cu 5.. 1p

Cel mai mare număr din $\mathcal{M}$ are la început cifre de 9, şi nu se poate ca primele sale 5 cifre să fie 9 (999993 nu se divide cu 9). El nu poate începe nici cu 4 cifre de 9 deoarece în caz contrar, notând cu x cifra rămasă, ar trebui ca $3+x$ să se dividă cu 9, deci $x = 6$, ceea ce am văzut că nu se poate. Numerele din $\mathcal{M}$ care încep cu trei de 9 nu conţin cifra 7 (în caz contrar, notând cu x cifra rămasă, ar trebui ca $10+x$ să se dividă cu 9, deci $x = 8$, imposibil). Cum 999333 aparţine mulţimii $\mathcal{M}$, deducem că cel mai mare element al acestei mulţimi este 999333................ 1p

În mod asemănător obţinem şi cel mai mic număr din $\mathcal{M}$: 111333. .... 1p

b) Am văzut că un număr din $\mathcal{M}$ are toate cifrele impare şi nu conţine cifra 5, deci are cel mult 4 cifre distincte. Aşadar, numerele din $\mathcal{M}$ pot avea eventual una, două, trei sau patru cifre distincte. 1p

În $\mathcal{M}$ există numere cu o cifră şi cu două cifre distincte, de exemplu 333333 şi 111333.. 1p

În $\mathcal{M}$ există şi numere cu trei cifre distincte, de exemplu 911133................. 1p

Numerele din $\mathcal{M}$ cu patru cifre distincte conţin toate cifrele 1, 3, 7, 9. Dacă $n = \overline{abcde3}$ este un asemenea număr, atunci trei dintre cifrele a, b, c, d, e sunt 1, 7, 9. Să notăm cu x, y celelalte două cifre. Atunci x şi y se află printre cifrele 1, 3, 7, 9 şi în plus $1 + 7 + 9 + 3 + x + y$ se divide cu 9, deoarece n se divide cu 9. Rezultă că $x + y = 7$ sau $x + y = 16$, de unde obţinem că $\{x, y\} = \{7, 9\}$, deci n are două cifre de 9, două cifre de 7, o cifră 1 şi o cifră (ultima) 3. . . . . 2p

Deoarece putem aranja cele şase cifre astfel în cât să obţinem un multiplu de 7 (de exemplu, numărul 979713 se divide cu 7), rezultă că în $\mathcal{M}$ există şi numere cu patru cifre distincte 1p

Remarcă. Pentru ultima parte a soluţiei este util următorul criteriu de divizibilitate cu 7, 11 sau 13, bazat pe egalitatea $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$: $\overline{abcdef}$ se divide cu 7 (11, 13) dacă şi numai dacă $\overline{abc} - \overline{def}$ se divide cu 7 (11, 13).

Subiectul 3

Start 1p

a) Un număr prim are doar divizori improprii, deci mulţimea $\mathcal{A}$ poate conţine cel mult un număr prim p, pe 101 (prima cifră este 1, deoarece 1 este singurul divizor de o cifră al lui p, a doua cifră este 0, deoarece p nu are divizori de două cifre, iar a treia cifră este 1, deoarece p este singurul divizor de trei cifre al său.) 1p

Deoarece 101 este prim, deducem că $\mathcal{A}$ conţine un singur număr prim. 1p

b) Vom arăta că mulţimea $\mathcal{A}$ nu conţine numere cu toate cifrele impare, deci baronul nu are dreptate. Observăm mai întâi că dacă $\overline{abc}$ aparţine mulţimii $\mathcal{A}$, atunci el are $a + b + c$ divizori. 1p

Dacă $\overline{abc} \in \mathcal{A}$ are toate cifrele impare, atunci $a + b + c$ este impar, deci $\overline{abc}$ este pătrat perfect (are un număr impar de divizori). 1p

În plus, prima cifră a lui $\overline{abc}$ este cel mult 5, deoarece divizorii de o cifră ai lui $\overline{abc}$ se află printre numerele 1, 3, 5, 7, 9. Însă niciunul dintre pătratele perfecte impare de trei cifre mai mici decât 600 nu are toate cifrele impare: $11^2 = 121$, $13^2 = 169$, $15^2 = 225$, $17^2 = 289$, $19^2 = 361$, $21^2 = 441$, $23^2 = 529$. (De fapt, penultima cifră a oricărui pătrat perfect impar este întotdeauna pară!) 1p

c) Dacă $\overline{abc} \in \mathcal{A}$, atunci $c \geq 1$ ($\overline{abc}$ este un divizor de trei cifre al lui $\overline{abc}$) şi $c \leq a$, deoarece fiecărui divizor d de trei cifre al lui $\overline{abc}$ îi corespunde divizorul $\frac{\overline{abc}}{d}$, care are o singură cifră. De asemenea, un număr $\overline{abc} \in A$ nu poate începe cu cifra 8, deoarece atunci cei 8 divizori de o cifră ai săi sunt 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8 şi 9, deci el s-ar divide cu $23 \cdot 32 \cdot 7 = 504$, ceea ce este imposibil. Aşadar dacă $\overline{abc}$ are toate cifrele pare, atunci $a \in \{2, 4, 6\}$, $c \in \{2, 4, 6\}$ şi $c \leq a$ 1p

Dacă $a = 2$, atunci $c = 2$, iar $\overline{abc}$ trebuie căutat printre numerele 202, 242, 262 (am exclus numerele 222 şi 282, deoarece se divid cu 3, pe când cei doi divizori de o cifră ai lui $\overline{abc}$ sunt 1 şi 2). Ştim că numărul 202 este bun. Numerele $242 = 2 \cdot 11^2$ şi $262 = 2 \cdot 131$ nu aparţin mulţimii $\mathcal{A}$: primul nu are decât 2 divizori de două cifre, iar al doilea nu are niciun divizor de două cifre. 1p

Dacă $a = 6$, atunci 3 se află printre cei şase divizori de o cifră a lui $\overline{abc}$. Rezultă că $a + b + c = 12$ sau $a + b + c = 18$, deci trebuie să verificăm numerele 606, 624, 642, 666 şi 684. Niciunul dintre ele nu aparţine însă mulţimii $\mathcal{A}$: $606 = 2 \cdot 3 \cdot 101$ nu are decât 4 divizori de o cifră (sau are doar 8 divizori), $624 = 2^4 \cdot 3 \cdot 13$ are mai mult de doi divizori de două cifre (sau are 20 divizori), $666 = 2 \cdot 3^2 \cdot 37$ are 5 divizori de o cifră (sau are doar 12 divizori) $684 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 19$ are 7 divizori de două cifre. ... 1p

Dacă $a = 4$, atunci $c = 2$ sau $c = 4$, iar printre divizorii de o cifră ai lui $\overline{abc}$ se află sau 3 sau 4 (în caz contrar ar lipsi 0, 3, 4, 5, 6, 8 şi 9) deci avem de verificat doar numerele: 402, 462, 404, 424, 444, 464, 484. Cum $402 = 2 \cdot 3 \cdot 67$ are cel puţin un divizor de două cifre, $462 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11$ are 5 divizori de o cifră, $404 = 2^2 \cdot 101$ nu are decât 3 divizori de o cifră, $424 = 2^3 \cdot 53$ nu are decât un divizor de două cifre, $444 = 2^2 \cdot 3 \cdot 37$ are 5 divizori de o cifră, $464 = 2^4 \cdot 29$ are doar 3 divizori de două cifre, $484 = 2^2 \cdot 11^2$ are doar 3 divizori de o cifră, niciunul dintre aceste numere nu se află în $\mathcal{A}$. 1p

Aşadar singurul număr din $\mathcal{A}$ cu toate cifrele pare este 202.

Subiectul 4

Start 1p

a) Notăm cu M mijlocul laturii $[BC]$. Din $\triangle BQM \equiv \triangle CQM$ (CC) rezultă că $\widehat{BQM} \equiv \widehat{CQM}$, deci $[QM$ este bisectoare în triunghiul BQC. Rezultă că punctul P este intersecţia a două dintre bisectoarele triunghiului BQC, deci este punctul de intersecţie a bisectoarelor acestui triunghi, de unde deducem că $[CP$ este bisectoarea unghiului C al triunghiului BCQ. 3p

Alternativ, se demonstrează că $\widehat{PBM} \equiv \widehat{PCM}$ şi $\widehat{QBM} \equiv \widehat{QCM}$ (din $\triangle PBM \equiv \triangle PCM$ şi $\triangle QBM \equiv \triangle QCM$ sau folosind triunghiurile isoscele BPC şi BQC), deci toate cele patru unghiuri, $\widehat{QBP}$, $\widehat{PBM}$, $\widehat{MCP}$ şi $\widehat{PCQ}$ sunt congruente. ..3p

b) Deoarece triunghiul QBM este dreptunghic rezultă că măsura unghiului BQM este $60°$. 1p

Deoarece $[QM$ este bisectoarea unghiului Q al triunghiului BQC, rezultă că $m(\widehat{MQC}) = 60°$, deci $m(\widehat{BQM}) = m(\widehat{MQC}) = m(\widehat{CQA}) = 60°$. 1p

Din punctul a) deducem că $m(\widehat{PCM}) = m(\widehat{PCQ}) = 15°$, deci $m(\widehat{PCQ}) = m(\widehat{QCA}) = 15°$ 2p

Rezultă că triunghiurile PQC şi AQC sunt congruente (ULU), deci $AC = PC$, şi cum $PC = BP$ obţinem că $BP = AC$. 2p

(Alternativ, $\triangle QBP \equiv \triangle QCA$ (ULU).)

Consecinţă. Într-un triunghi dreptunghic cu un unghi de $30°$, lungimea bisectoarei unghiului de $30°$ este de două ori mai mare decât lungimea bisectoarei unghiului drept.

Notă: La fiecare subiect, *o soluţie corectă* (alta decât cea propusă în barem), *va fi punctată cu 10 p.*

Universitatea de Vest din Timişoara
Inspectoratul Şcolar Judeţean Arad

Concursul Interjudeţean de Matematică Memorialul "Traian Lalescu"

Ediţia a XXXI-a, Arad, 31 martie - 2 aprilie 2017

Barem de corectare

Clasa a VII - a

Subiectul 1

Start 1p

$7\sqrt{3} = \sqrt{147} \in (12, 13)$ 1p

deci $[7\sqrt{3}] = 12$ 1p

şi $\{7\sqrt{3}\} = 7\sqrt{3} - 12 = \sqrt{147} - 12 = \dfrac{147 - 144}{\sqrt{147} + 12} > \dfrac{3}{13 + 12} = \dfrac{3}{25}$ 1p

$3\sqrt{7} = \sqrt{63} \in (7, 8)$ 1p

deci $[3\sqrt{7}] = 7$ 1p

şi $\{3\sqrt{7}\} = 3\sqrt{7} - 7 = 1 - (8 - 3\sqrt{7}) = 1 - \dfrac{64 - 63}{8 + \sqrt{63}} > 1 - \dfrac{1}{8 + 7} = \dfrac{14}{15}$ .. 2p

$20 < 12 + 7 + \dfrac{79}{75} = 12 + \dfrac{3}{25} + 7 + \dfrac{14}{15} < 7\sqrt{3} + 3\sqrt{7} < 13 + 8 = 21,$ 1p

deci $[7\sqrt{3} + 3\sqrt{7}] = 20.$ 1p

Subiectul 2

Start 1p

$p \mid x^{12} + x^9 + x^6 + x^3 + 1 = (x^3)^4 + (x^3)^3 + (x^3)^2 + x^3 + 1 = \frac{(x^3)^5 - 1}{x^3 - 1} = \frac{(x^5)^3 - 1}{x^3 - 1} =$
$= \frac{(x^5-1)((x^5)^2+x^5+1)}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{(x^4+x^3+x^2+x+1)(x^{10}+x^5+1)}{x^2+x+1}$ 6p

deci p divide cel puţin unul dintre factorii numărătorului. 3p

Subiectul 3

Start 1p

Din teorema bisectoarei obţinem succesiv

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}\ , \quad \frac{BD}{BD+DC} = \frac{AB}{AB+AC}\ , \quad BD = \frac{AB\cdot BC}{AB+AC} = \frac{80}{21}$$

....3p

Aplicăm teorema lui Menelaos triunghiului ADC şi transversalei BF:

$$\frac{AE}{ED}\cdot\frac{DB}{BC}\cdot\frac{CF}{FA} = 1$$

....2p

de unde rezultă succesiv

$$\frac{AF}{FC} = \frac{BD}{BC} = \frac{\frac{80}{21}}{20} = \frac{4}{21}\ , \quad \frac{AF}{AF+FC} = \frac{4}{25}\ , \quad AF = \frac{68}{25}\ .$$

....4p

Subiectul 4

Start 1p

Fiind unghi exterior triunghiului ABD, unghiul $\widehat{ADC}$ nu poate fi congruent nici cu unghiul $\widehat{ABD}$, nici cu unghiul $\widehat{BAD}$. Rămâne doar posibilitatea $\widehat{ADC} \equiv \widehat{ADB}$, adică $AD \perp BC$. 2p

Toate cele 3 triunghiuri sunt deci dreptunghice, iar singurul unghi al triunghiului ABC care poate fi drept este $\widehat{BAC}$. 2p

Triunghiurile AOB, BOC, COD şi DOA le numim "mici", iar triunghiurile ABC, ACD, ABD şi BCD le numim "mari". Cele 7 triunghiuri asemenea între ele sunt sau 4 "mici" şi 3 "mari" (cazul i.), sau 3 "mici" şi 4 "mari" (cazul ii.). 1p

Putem presupune că cele 3 triunghiuri "mari" asemenea sunt ABC, ACD şi ABD. Aplicând fiecăruia concluzia de la punctul (a) rezultă că patrulaterul $ABCD$ are 3 unghiuri drepte şi diagonalele perpendiculare, deci este un pătrat. Toate cele 8 triunghiuri formate sunt asemenea, fiind dreptunghice isoscele...2p

Putem presupune că cele 3 triunghiuri "mici" asemenea sunt AOB, BOC şi COD. Aplicând triunghiurilor ABC şi BCD concluzia de la punctul

(a) rezultă că patrulaterul $ABCD$ are două unghiuri drepte ($\hat{B}$ şi $\hat{C}$) şi diagonalele perpendiculare.

Triunghiul ABD este şi el dreptunghic, cu unghiurile $\widehat{ABD}$ şi $\widehat{ADB}$ ascuţite (fiecare dintre acestea face parte dintr-un triunghi "mic" dreptunghic), deci neapărat unghiul $\hat{A}$ al patrulaterului este drept. Patrulaterul $ABCD$ este astfel un pătrat şi cle 8 triunghiuri formate sunt toate asemenea. . . . 2p

Notă: La fiecare subiect, *o soluţie corectă* (alta decât cea propusă în barem), *va fi punctată cu 10 p.*

Universitatea de Vest din Timişoara
Inspectoratul Şcolar Judeţean Arad

Concursul Interjudeţean de Matematică Memorialul "Traian Lalescu"

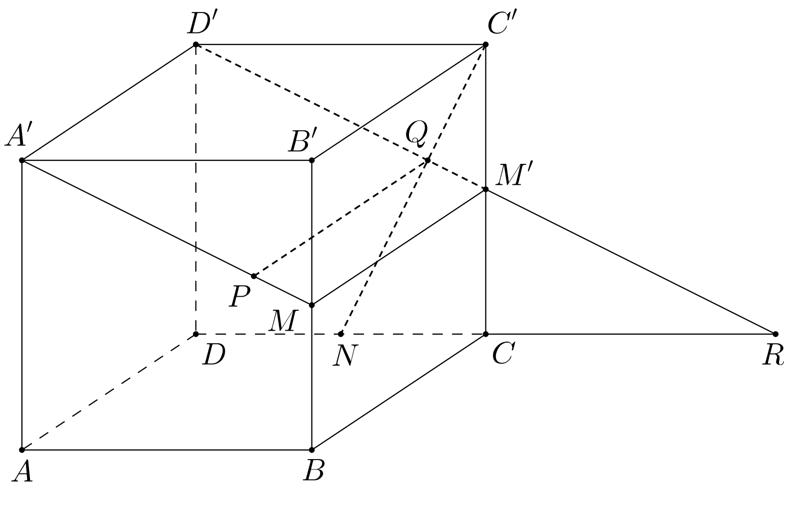
Ediţia a XXXI-a, Arad, 31 martie - 2 aprilie 2017

Barem de corectare

Clasa a VIII-a

Subiectul 1 Fie M şi N mijloacele muchiilor $[BB']$, respectiv $[CD]$, ale cubului $ABCDA'B'C'D'$.
a) Arătaţi că dreptele $A'M$ şi $C'N$ sunt perpendiculare.
b) Dacă PQ, cu $P \in A'M$ şi $Q \in C'N$, este perpendiculara comună a dreptelor $A'M$ şi $C'N$, aflaţi raportul $\dfrac{A'P}{PM}$.

* * *



Start 1p
a) Fie M' mijlocul lui $[CC']$. Atunci $A'MM'D'$ este dreptunghi. 2p
Este suficient atunci să demonstrăm că $C'N \perp D'M'$. Acest lucru rezultă din congruenţa triunghiurilor $D'C'M'$ şi $C'CN$ (CC). Atunci $m(\sphericalangle NC'D') = 90° - m(\sphericalangle NC'C) = 90° - m(\sphericalangle C'D'M')$, de unde concluzia. 2p
b) Fie $\{Q\} = D'M' \cap C'N$ şi $P \in (A'M)$ astfel încât $A'P = D'Q$. Evident, $A'D'QP$ este dreptunghi, deci $PQ \parallel A'D'$, adică $PQ \perp (CDD'C')$. Deducem că $PQ \perp C'N$ şi $PQ \perp D'M'$, deci $PQ \perp A'M$. Prin urmare, PQ este perpendiculara comună a dreptelor $A'M$ şi $C'N$. 2p
Dacă $\{R\} = CD \cap D'M'$, avem $CR = C'D'$, deci $\dfrac{D'Q}{QR} = \dfrac{C'D'}{NR} = \dfrac{2}{3}$. Obţinem că $\dfrac{D'Q}{D'R} = \dfrac{2}{5}$, $\dfrac{D'Q}{D'M'} = \dfrac{4}{5}$ şi $\dfrac{A'P}{PM} = \dfrac{D'Q}{QM'} = 4$. 3p

Subiectul 2 a) Rezolvaţi ecuaţia

$$\left[\frac{x}{5}\right]+\left[\frac{x+1}{5}\right]+\left[\frac{x+2}{5}\right]+\left[\frac{x+3}{5}\right]+\left[\frac{x+4}{5}\right]+\left[\frac{x+5}{5}\right]=2017.$$

b) Determinaţi mulţimea valorilor pe care le ia expresia

$$\left[\frac{x}{5}\right]+\left[\frac{x+1}{5}\right]+\left[\frac{x+2}{5}\right]+\left[\frac{x+3}{5}\right]+\left[\frac{x+4}{5}\right]+\left[\frac{x+5}{5}\right],$$

când $x \geq 0$.

* * *

Start 1p

a) Dacă $\left[\frac{x}{5}\right]=k\in\mathbb{N}$, atunci $\left[\frac{x+5}{5}\right]=k+1$, deci fiecare din numerele $\left[\frac{x+1}{5}\right]$, $\left[\frac{x+2}{5}\right]$, $\left[\frac{x+3}{5}\right]$, $\left[\frac{x+4}{5}\right]$ este egal cu k sau cu $k+1$. 2p

Atunci suma dată va fi egală cu $6k+1$, $6k+2$, $6k+3$, $6k+4$ sau $6k+5$. 2p

Cum $2017=6\cdot 336+1$, rezultă că $k=336$ 1p

dar şi faptul că $\left[\frac{x+4}{5}\right]=k=336$, deci $\frac{x+4}{5}<337\leq\frac{x+5}{5}$. Deducem că $x\in[1680,1681)$. Orice x din acest interval satisface condiţia din enunţ. 2p

b) Din cele de mai sus se vede că valorile care se obţin sunt numere naturale nedivizibile cu 6.

Pe de altă parte toate aceste numere se obţin:

Dacă $x=5n$, $n\in\mathbb{N}$, expresia este $6n+1$; dacă $x=5n+1$, expresia este $6n+2$, ş.a.m.d., dacă $x=5n+4$, expresia este $6n+5$. 2p

Subiectul 3 Pe muchiile laterale ale cubului $ABCDA'B'C'D'$ de latură $2\,\text{m}$ se consideră punctele $P_1, P_5, \ldots, P_{97}\in[AA']$, $P_2, P_6, \ldots, P_{98}\in[BB']$, $P_3, P_7, \ldots, P_{99}\in[CC']$ şi $P_4, P_8, \ldots, P_{100}\in[DD']$ astfel încât $d\big(P_k,(ABCD)\big)=k\,\text{cm}$, oricare ar fi $k\in\{1,2,\ldots,100\}$.

Câte plane distincte determină cele 100 puncte?

Andrei Eckstein

Start 1p

Un plan este determinat de trei puncte necoliniare. Dacă două dintre cele trei puncte de află pe o aceeaşi muchie şi un al treilea se află pe o altă muchie, cele trei puncte determină fie una dintre feţe, fie unul dintre cele două plane diagonale verticale. Obţinem 6 asemenea plane. 2p

Mai rămân planele determinate de trei puncte aparţinând unor muchii diferite.

Există $25\cdot 25\cdot 25\cdot 4=62500$ asemenea plane. 1p

Putem alege cele trei muchi pe care se află punctele în 4 moduri, iar fiecare punct de pe respectiva muchie în câte 25 de moduri. 2p

Mai rămâne să demonstrăm că toate aceste plane sunt distincte. 1p

Presupunând că punctele $P_a \in [AA']$, $P_b \in [BB']$, $P_c \in [CC']$ şi $P_d \in [DD']$ ar fi coplanare, dacă notăm cu $\{O\} = AC \cap BD$ şi cu O' intersecţia perpendicularei în O pe planul $(ABCD)$ cu planul $(P_aP_bP_cP_d)$, atunci $[OO']$ este linie mijlocie în trapezele AP_aP_cC şi BP_bP_dD, deci $2OO' = AP_a + CP_c = BP_b + DP_d$, deci $a + c = b + d$. Dar $a \equiv 1 \pmod 4$, $b \equiv 2 \pmod 4$, $c \equiv 3 \pmod 4$, $d \equiv 0 \pmod 4$, deci $a + c \equiv 0 \pmod 4$, iar $b + d \equiv 2 \pmod 4$, prin urmare egalitatea $a + c = b + d$ nu poate avea loc, deci punctele nu pot fi coplanare. 3p

Subiectul 4 Pentru $x, y, z \in [1, 3]$ notăm $E(x, y, z) = xyz + (4 - x)(4 - y)(4 - z)$.
a) Demonstraţi că $(x - 2)(y - 2) \le 1 - |x - y|$, $\forall\, x, y \in [1, 3]$.
b) Folosind eventual subpunctul anterior, determinaţi maximul expresiei $E(x, y, z)$.
c) Arătaţi că $E(x, y, z) \ge \min\{E(x, y, 1),\ E(x, y, 3)\}$, $\forall\, x, y, z \in [1, 3]$.
d) Demonstraţi că $E(x, y, z) \ge 12$, $\forall\, x, y, z \in [1, 3]$. Când are loc egalitatea?

prelucrare *Andrei Eckstein*

Start 1p
a) Datorită simetriei, putem presupune $x \le y$. Inegalitatea de demonstrat devine $xy - y - 3x + 3 \le 0$, adică $(x - 1)(y - 3) \le 0$, ceea ce este adevărat deoarece $x - 1 \ge 0$ şi $y - 3 \le 0$. 1p
b) Avem $(x - 2)(y - 2) \le 1 - |x - y| \le 1$ şi, analog, $(y - 2)(z - 2) \le 1$ şi $(z - 2)(x - 2) \le 1$. Adunând aceste relaţii obţinem că $xy + yz + zx - 4(x + y + z) \le -9$. 1p
Dar $E(x, y, z) = 4[xy + yz + zx - 4(x + y + z)] + 64 \le 4 \cdot (-9) + 64 = 28$. 1p
Pe de altă parte, pentru $x = y = z = 1$ (sau $x = y = z = 3$) această valoare chiar se atinge, deci maximul căutat este 28. .... 1p
c) Avem $E(x, y, z) - E(x, y, 1) = xy(z - 1) + (4 - x)(4 - y)(1 - z) = 4(z - 1)(x + y - 4)$ şi $E(x, y, z) - E(x, y, 3) = xy(z - 3) + (4 - x)(4 - y)(3 - z) = 4(z - 3)(x + y - 4)$. Dacă $x + y \ge 4$, atunci $E(x, y, z) \ge E(x, y, 1)$, iar dacă $x + y \le 4$, atunci $E(x, y, z) \ge E(x, y, 3)$. 1p
d) Avem succesiv: $E(x, y, z) \ge \min\{E(x, y, 1), E(x, y, 3)\} \ge \min\{E(x, 1, 1), E(x, 3, 1), E(x, 1, 3), E(x, 3, 3)\} \ge \min\{E(1, 1, 1), E(3, 1, 1), E(1, 3, 1), E(3, 3, 1), E(1, 1, 3), E(3, 1, 3), E(1, 3, 3), E(3, 3, 3)\} = \min\{28, 12\} = 12$.
.... 2p
Egalitate în inegalitatea de la c) avem dacă $z = 1$, $z = 3$ sau dacă $x + y = 4$.
În final, egalitate avem dacă una din variabile este egală cu 1, iar o a doua este egală cu 3. (A treia variabilă poate lua orice valoare.) 2p

Notă: La fiecare subiect, *o soluţie corectă* (alta decât cea propusă în barem), *va fi punctată cu 10 p.*