Soluţii şi barem orientativ de corectare la clasa a IX-a

1. *Determinaţi funcţiile* $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ *care verifică* $3f(f(x)) = 7f(x) - 2x$ *pentru orice* $x\in\mathbb{Z}$.

Soluţie şi barem:

Start **1p**

Se observă că funcţia $f(x) = 2x,\ \forall x\in\mathbb{Z}$ este soluţie a problemei **2p**

Presupunem că problema are şi alte soluţii; atunci există $x_0\in\mathbb{Z}$ astfel încât $f(x_0) - 2x_0 \neq 0$.

Din ipoteză avem $3\left(f(f(x_0)) - 2f(x_0)\right) = f(x_0) - 2x_0$ **2p**

Înlocuind x cu $f^{(k)}(x_0)$ în ipoteză, pentru $k = 1, 2, \ldots, n-1$, se obţine inductiv

$3^n\left(f^{(n+1)}(x_0) - 2f^{(n)}(x_0)\right) = f(x_0) - 2x_0$ pentru orice $n\in\mathbb{N}$ **3p**

Numărul întreg nenul $f(x_0) - 2x_0$ se divide cu orice putere a lui 3 – contradicţie; rezultă unicitatea soluţiei **2p**

2. *Fie* $ABCD$ *un trapez* $(AB||CD)$ *şi punctele* $M\in(BC), N\in(AD)$. *Arătaţi că* $AM||CN$ *dacă şi numai dacă* $BN||DM$.

Soluţie şi barem:

Varianta 1

Start **1p**

Există $\lambda > 0, h, k\in(0,1)$ astfel încât $\overrightarrow{AB} = \lambda\overrightarrow{DC},\ \overrightarrow{MB} = h\overrightarrow{CB},\ \overrightarrow{NA} = k\overrightarrow{DA}$ **2p**

Se obţine:

$\overrightarrow{AM} = h\overrightarrow{AC} + (1-h)\overrightarrow{AB} = h\overrightarrow{AC} + (1-h)\lambda\overrightarrow{DC}$ **1p**

$\overrightarrow{NC} = (1-k)\overrightarrow{AC} + k\overrightarrow{DC}$ **1p**

$AM||CN \Leftrightarrow \exists\mu : \overrightarrow{AM} = \mu\overrightarrow{NC} \Leftrightarrow \dfrac{h}{1-k} = \dfrac{(1-h)\lambda}{k} \Leftrightarrow hk = \lambda(1-h)(1-k)$ **1p**

Analog: $\overrightarrow{BN} = k\overrightarrow{BD} + (1-k)\overrightarrow{BA} = k\overrightarrow{BD} + (1-k)\lambda\overrightarrow{CD}$ **1p**

$\overrightarrow{MD} = (1-h)\overrightarrow{BD} + h\overrightarrow{CD}$ **1p**

$BN||DM \Leftrightarrow \exists\nu : \overrightarrow{BN} = \nu\overrightarrow{MD} \Leftrightarrow \dfrac{k}{1-h} = \dfrac{(1-k)\lambda}{h} \Leftrightarrow hk = \lambda(1-h)(1-k)$ **1p**

Din cele de mai sus rezultă $AM||CN \Leftrightarrow BN||DM$ **1p**

Varianta 2 (cu *produs vectorial*)

$$
\begin{aligned}
(1)\quad AM||CN &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\times\overrightarrow{CN} = \overrightarrow{0}\\
&\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}\right)\times\left(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DN}\right) = \overrightarrow{0}\\
&\Leftrightarrow \underbrace{\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{CD}}_{=\overrightarrow{0}\text{ din } AB||CD} + \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{DN} + \overrightarrow{BM}\times\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BM}\times\overrightarrow{DN} = \overrightarrow{0}\\
&\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{DN} + \overrightarrow{BM}\times\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BM}\times\overrightarrow{DN} = \overrightarrow{0}.
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}(2)\quad BN||DM &\Leftrightarrow \overrightarrow{BN}\times\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{0}\\ &\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DN}\right)\times\left(\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BM}\right)=\overrightarrow{0}\\ &\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}\right)\times\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{DN}\times\left(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}\right)+\overrightarrow{DN}\times\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{0}\\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{CD}\times\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{DN}\times\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DN}\times\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{0}.\end{aligned}$$

Punctajul se acordă astfel: start – **1p**; câte **4p** pentru fiecare set de echivalenţe; **1p** pentru finalizare.

3. *Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcţie care verifică*

$$f\left(\frac{x+2y}{3}\right)\leq\frac{f(x)+2f(y)}{3}$$

pentru orice $x,y\in\mathbb{R}$. Arătaţi că:

(a) $f\left(\frac{x+y}{2}\right)\leq\frac{f(x)+f(y)}{2}$ *pentru orice $x,y\in\mathbb{R}$;*

(b) $f\left(\frac{x+y+z}{3}\right)\leq\frac{f(x)+f(y)+f(z)}{3}$ *pentru orice $x,y,z\in\mathbb{R}$.*

Soluţie şi barem:

Start **1p**

(a) Inegalitatea este adevărată pentru $x=y$. Fie $x,y\in\mathbb{R}$ cu $x<y$. Atunci se observă că valorile reale

$$x<\frac{5x+y}{6}<\frac{2x+y}{3}<\frac{x+y}{2}<\frac{x+2y}{3}<\frac{x+5y}{6}<y$$

împart intervalul $[x,y]$ în 6 subintervale de lungimi egale cu $\frac{y-x}{6}$ **1p**

Aplicând ipoteza se obţin inegalităţile:

(1) $f\left(\frac{x+y}{2}\right)=f\left(\frac{2\cdot\frac{2x+y}{3}+\frac{x+5y}{6}}{3}\right)\leq\frac{2f\left(\frac{2x+y}{3}\right)+f\left(\frac{x+5y}{6}\right)}{3}$ **1p**

(2) $f\left(\frac{x+y}{2}\right)=f\left(\frac{2\cdot\frac{x+2y}{3}+\frac{5x+y}{6}}{3}\right)\leq\frac{2f\left(\frac{x+2y}{3}\right)+f\left(\frac{5x+y}{6}\right)}{3}$ **1p**

(3) $f\left(\frac{5x+y}{6}\right)=f\left(\frac{2x+\frac{x+y}{2}}{3}\right)\leq\frac{2f\left(x\right)+f\left(\frac{x+y}{2}\right)}{3}$ **1p**

(4) $f\left(\frac{x+5y}{6}\right)=f\left(\frac{2y+\frac{x+y}{2}}{3}\right)\leq\frac{2f\left(y\right)+f\left(\frac{x+y}{2}\right)}{3}$ **1p**

Însumând (1) şi (2), apoi utilizând (3), (4) şi ipoteza (adică inegalităţile $f\left(\dfrac{x+2y}{3}\right) \le \dfrac{f(x)+2f(y)}{3}$ şi $f\left(\dfrac{2x+y}{3}\right) \le \dfrac{2f(x)+f(y)}{3}$) se obţine (a) **2p**

(b) Utilizând (a): $f\left(\dfrac{x+y+z}{3}\right) = f\left(\dfrac{x+2\cdot\dfrac{y+z}{2}}{3}\right) \le \dfrac{f(x)+2f\left(\dfrac{y+z}{2}\right)}{3} \le$

$\le \dfrac{f(x)+2\cdot\dfrac{f(y)+f(z)}{2}}{3} = \dfrac{f(x)+f(y)+f(z)}{3}$ **2p**

4. *Trei drepte care trec prin vârfurile A, B, respectiv C ale unui triunghi ABC intersectează a doua oară cercul circumscris acestui triunghi în punctele A_2, B_2, respectiv C_2 şi laturile $(BC), (CA), (AB)$ în punctele A_1, B_1, respectiv C_1. Arătaţi că*

$$\frac{AA_2}{A_1A_2}\cdot\frac{BB_2}{B_1B_2}\cdot\frac{CC_2}{C_1C_2} \ge 64.$$

Soluţie şi barem:

Start **1p**

Exprimând puterea punctului A_1 faţă de cercul circumscris în două moduri rezultă

(1) $\dfrac{AA_2}{A_1A_2} = \dfrac{AA_1}{A_1A_2} + 1 = \dfrac{AA_1^2}{BA_1\cdot A_1C} + 1$ **1p**

Din relaţia lui Stewart obţinem

$AA_1^2\cdot BC = AB^2\cdot A_1C + AC^2\cdot BA_1 - BA_1\cdot A_1C\cdot BC$, de unde

(2) $\dfrac{AA_1^2}{BA_1\cdot A_1C} + 1 = \dfrac{AB^2}{BC\cdot BA_1} + \dfrac{AC^2}{BC\cdot A_1C}$ **2p**

Din (1) şi (2) cu inegalitatea lui Bergström(”CBS în forma Titu Andreescu”) se obţine:

(3) $\dfrac{AA_2}{A_1A_2} = \dfrac{AB^2}{BC\cdot BA_1} + \dfrac{AC^2}{BC\cdot A_1C} \ge \dfrac{(AB+AC)^2}{BC^2}$ **2p**

Scriind inegalităţile analoage $\dfrac{BB_2}{B_1B_2} \ge \dfrac{(AB+BC)^2}{AC^2}$ şi $\dfrac{CC_2}{C_1C_2} \ge \dfrac{(BC+AC)^2}{AB^2}$ rezultă că este suficient să demonstrăm $(AB+AC)(AB+BC)(BC+AC) \ge 8BC\cdot AC\cdot AB$ sau echivalent $(b+c)(c+a)(a+b) \ge 8abc$ **2p**

Această din urmă inegalitate rezultă înmulţind inegalităţile $b+c \ge 2\sqrt{bc},\ c+a \ge 2\sqrt{ca},\ a+b \ge 2\sqrt{ab}$ **2p**

Notă: La fiecare problemă, orice soluţie **completă şi corectă** (alta decât cea propusă în barem) va fi punctată cu 10p.

Soluţii şi barem orientativ de corectare la clasa a X-a

1. *Calculaţi sumele*

$$S_1 = \sum_{k=1}^{2017} k \cdot \cos\left(\frac{2k\pi}{2018}\right),$$

$$S_2 = 24 + 3 \cdot \sum_{k=1}^{2017} k^2 \cdot \cos\left(\frac{2k\pi}{2018}\right).$$

Soluţie şi barem: Start **1p**

Considerăm $z = \cos\left(\frac{2\pi}{2018}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{2018}\right)$. Atunci S_1 şi S_2 sunt părţile reale ale sumelor

$$\sigma_1 = \sum_{k=1}^{2017} k \cdot z^k,$$

respectiv

$$\sigma_2 = 24 + 3 \cdot \sum_{k=1}^{2017} k^2 \cdot z^k$$

.... **2p**

Pentru σ_1 avem

$$\sigma_1 = \sum_{k=1}^{2017} k \cdot z^k = \sum_{k=1}^{2017}\sum_{l=k}^{2017} z^l = \sum_{k=1}^{2017} \frac{z^k - z^{2018}}{1-z} =$$

$$= \frac{\sum_{k=1}^{2017} z^k - 2017}{1-z} = \frac{z - z^{2018} - 2017(1-z)}{(1-z)^2} = \frac{2018(z-1)}{(z-1)^2} = \frac{2018}{z-1} =$$

$$= -2018 \cdot \frac{1}{1 - \cos\left(\frac{2\pi}{2018}\right) - i \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{2018}\right)} = -2018 \cdot \frac{1}{-2i \sin\left(\frac{\pi}{2018}\right)} \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{2018}\right) - i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2018}\right)\right) =$$

$$= -1009 \cdot \left(1 + i \cdot ctg\left(\frac{\pi}{2018}\right)\right).$$

Obţinem că $S_1 = Re(\sigma_1) = -1009$. **2p**

Pentru σ_2 avem

$$\sum_{k=1}^{2017} k^2 \cdot z^k = \sum_{k=1}^{2017} z^k \cdot \sum_{m=1}^{k}(2m-1) = \sum_{m=1}^{2017}(2m-1)\sum_{k=m}^{2017} z^k =$$

$$= \sum_{m=1}^{2017}(2m-1) \cdot \frac{z^m - z^{2018}}{1-z} = \frac{1}{1-z} \cdot (-2017 + 2\sigma_1) = \frac{1}{1-z} \cdot \left(-4035 - 2018i \cdot ctg\left(\frac{\pi}{2018}\right)\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(1 + i \cdot ctg\left(\frac{\pi}{2018}\right)\right) \cdot \left(-4035 - 2018i \cdot ctg\left(\frac{\pi}{2018}\right)\right).$$

.... **4p**

Obţinem

$$S_2 = Re(\sigma_2) = 24 + \frac{3}{2} \cdot \left(4035 - 2018 \cdot ctg^2\left(\frac{\pi}{2018}\right)\right).$$

.... **1p**

2. *Rezolvaţi ecuaţia*

$$3^{x^2+73} + 27^{9x} = 3^{27x+1} \cdot \log_3(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{27-x}).$$

Soluţie şi barem: Start **1p**
Împărţind ambii membrii ai ecuaţiei prin 3^{27x+1}, aceasta devine

$$3^{x^2-27x+72} + \frac{1}{3} = \log_3(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{27-x}).$$

.... **1p**
Dacă $f(x) = 3^{x^2-27x+72} + \frac{1}{3}$ şi $g(x) = \log_3(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{27-x})$, ambele funcţii sunt $\frac{27}{2}$−pare, astfel că dacă x este o soluţie a ecuaţiei, atunci şi $27 - x$ este o soluţie. **1p**
Pe intervalul $[0, 27]$ funcţia f este convexă, fiind compunerea unei funcţii convexe crescătoare cu o funcţie convexă, iar g este concavă, fiind compunerea unei funcţii concave crescătoare cu o funcţie concavă. **2p**
Prin urmare, ecuaţia poate avea în acest interval cel mult 2 soluţii. **1p**
Se observă că $x = 3$, şi deci şi $x = 24$, este soluţie. **1p**
Vom arăta că acestea sunt singurele soluţii. Datorită simetriei, este suficient să arătăm că ecuaţia nu are soluţii cu $x > 27$.
Pentru $x > 27$ avem că $f(x) > f(27) = 3^{72} + \frac{1}{3}$,. **1p**
respectiv

$$g(x) = \log_3(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{27-x}) = \log_3 \frac{27}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x(x-27)} + \sqrt[3]{(x-27)^2}} \leq \log_3 \frac{27}{\sqrt[3]{27^2}} = 2$$

. ... **1p**
Rezultă că ecuaţia $f(x) = g(x)$ nu are soluţii cu $x > 27$, deci nici cu $x < 0$. Singurele soluţii ale ecuaţiei sunt atunci $x = 3$ şi $x = 24$. **1p**

3. *a) Arătaţi că pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, există $f : (0, \infty) \longrightarrow (0, \infty)$ cu proprietatea că $f^{[n]}(x) = x^n$, $(\forall)x > 0$, unde $f^{[1]} = f$ şi $f^{[k+1]} = f \circ f^{[k]}$, $(\forall)k \in \mathbb{N}^*$.*
b) Arătaţi că pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, există $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ cu proprietatea că $f^{[n]}(x) = x^n$, $(\forall)x \in \mathbb{R}$.
c) Studiaţi dacă există $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ cu proprietatea că $(f \circ f)(z) = z^2$, $(\forall)z \in \mathbb{C}$.
Soluţie şi barem: Start **1p**
a) Pentru o funcţie putere $f : (0, \infty) \longrightarrow (0, \infty)$, $f(x) = x^\alpha$, avem că $f^{[n]}(x) = x^{\alpha^n}$ **1p**
Funcţia $f : (0, \infty) \longrightarrow (0, \infty)$, $f(x) = x^{\sqrt[n]{n}}$, $(\forall)x > 0$ are proprietatea că
$f^{[n]}(x) = x^n$, $(\forall)x > 0$. **2p**
b) Funcţia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = sgn(x) \cdot |x|^{\sqrt[n]{n}}$, $(\forall)x \in \mathbb{R}$ are proprietatea că
$f^{[n]}(x) = x^n$, $(\forall)x \in \mathbb{R}$. **2p**
c) Arătăm că nu există o astfel de funcţie.
Presupunând că o funcţie f ar avea proprietatea din enunţ, rezultă că 0 şi 1 sunt singurele puncte fixe ale lui $f \circ f$, astfel că $\{f(0), f(1)\} = \{0, 1\}$. **1p**
Fie $a = f(-1)$ şi $b = f(i)$. Avem că $f(a) = (f \circ f)(-1) = 1$, astfel că $a^2 = (f \circ f)(a) = f(1)$, respectiv $f(b) = (f \circ f)(i) = -1$, şi $b^2 = f(-1) = a$. **1p**
Dacă $f(1) = 1$, rezultă că $a \in \{-1, 1\}$, şi cum $f(-1) \neq -1$, rezultă că $a = 1$ şi atunci $b \in \{-1, 1\}$ şi $f(b) = 1$. Obţinem atunci contradicţia $-1 = f(b) = 1$.
Dacă $f(1) = 0$, atunci $a = 0$ şi $b = 0$. Rezultă atunci $-1 = f(b) = f(0) = 1$, contradicţie. **1p**

Prin urmare, nu există funcţii cu proprietatea din enunţ. **1p**

4. *Fie $\mathcal{K} = \{(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} | \alpha + \beta + \gamma = 1\}$. Pentru orice triunghi XYZ din plan cu afixele vârfurilor $x, y, z \in \mathbb{C}$ şi orice $\lambda = (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathcal{K}$ numim $\lambda-$punct al triunghiului XYZ punctul de afix $\alpha \cdot x + \beta \cdot y + \gamma \cdot z$.*
Fie ABC un triunghi în plan cu centrul de greutate G şi $\lambda \in \mathcal{K}$ fixat. Fie P $\lambda-$punctul triunghiului ABC, $A_1 \in AP \cap BC$, $B_1 \in BP \cap AC$, $C_1 \in CP \cap AB$. De asemenea, fie K $\lambda-$punctul triunghiului AB_1C_1, L $\lambda-$punctul triunghiului A_1BC_1 şi M $\lambda-$punctul triunghiului A_1B_1C. Arătaţi că:
a) Dreptele AK, BL şi CM sunt concurente într-un punct Q, coliniar cu P şi G, cu $\overline{PQ} = 3 \cdot \overline{GQ}$.
b) Dacă G_1 este centrul de greutate al triunghiului $A_1B_1C_1$, iar G_2 centrul de greutate al triunghiului KLM, atunci G_1 este mijlocul segmentului $[PG_2]$.
Soluţie şi barem: Start **1p**
Vom nota afixul fiecărui punct cu litera mică corespunzătoare literei cu care este notat punctul.
a) Afixele punctelor A_1, B_1, C_1 sunt

$$a_1 = \frac{\beta \cdot b + \gamma \cdot c}{\beta + \gamma}, \quad b_1 = \frac{\alpha \cdot a + \gamma \cdot c}{\alpha + \gamma}, \quad c_1 = \frac{\alpha \cdot a + \beta \cdot b}{\alpha + \beta}.$$

.... **1p**
Pentru punctele K, L, M avem

$$k = \alpha \cdot a + \beta \cdot b_1 + \gamma \cdot c_1 = \left(\alpha + \frac{\alpha\beta}{\alpha + \gamma} + \frac{\alpha\gamma}{\alpha + \beta}\right) \cdot a + \frac{\beta\gamma}{\alpha + \beta} \cdot b + \frac{\beta\gamma}{\alpha + \gamma} \cdot c.$$

Analog,

$$l = \alpha \cdot a_1 + \beta \cdot b + \gamma \cdot c_1 = \frac{\alpha\gamma}{\alpha + \beta} \cdot a + \left(\beta + \frac{\alpha\beta}{\beta + \gamma} + \frac{\beta\gamma}{\alpha + \beta}\right) \cdot b + \frac{\alpha\gamma}{\beta + \gamma} \cdot c,$$

şi

$$m = \alpha \cdot a_1 + \beta \cdot b_1 + \gamma \cdot c = \frac{\alpha\beta}{\alpha + \gamma} \cdot a + \frac{\alpha\beta}{\beta + \gamma} \cdot b + \left(\gamma + \frac{\alpha\gamma}{\beta + \gamma} + \frac{\beta\gamma}{\alpha + \gamma}\right) \cdot c.$$

.... **1p**
Deoarece numărul complex q dat de

$$q = \frac{\beta + \gamma}{2} \cdot a + \frac{\alpha + \gamma}{2} \cdot b + \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot c$$

are atunci propietatea că

$$\frac{a - q}{a - k} \in \mathbb{R}, \quad \frac{b - q}{b - l} \in \mathbb{R}, \quad \frac{c - q}{c - m} \in \mathbb{R},$$

.... **1p**
rezultă că $Q \in AK \cap BL \cap CM$. **1p**
În plus, cum afixul centrului de greutate G al triunghiului ABC are afixul $g = \frac{a+b+c}{3}$, rezultă că $p + 2q = 3g$, relaţie echivalentă cu $q - p = 3(q - g)$, ceea ce demonstrează relaţia enunţată. **1p**
b) Cum $g_1 = \frac{a_1+b_1+c_1}{3}$ şi $g_2 = \frac{k+l+m}{3}$,
se verifică prin calcul că $p + g_2 = 2g_1$, ceea ce demonstrează proprietatea enunţată. **3p**

Soluţii şi barem orientativ de corectare la clasa a XI-a

1. *Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir de numere reale astfel încât*

$$\lim_{n\to\infty}(x_{n+1}-x_n)=\frac{1}{e}.$$

Studiaţi convergenţa şirului $(\{x_n\})_{n\in\mathbb{N}}$, unde prin $\{a\}$ s-a notat partea fracţionară a numărului real a.

Soluţie şi barem: Start **1p**

Presupune că şirul $(\{x_n\})_{n\in\mathbb{N}}\subset[0,1)$ este convergent şi astfel există $l\in[0,1]$ cu $\lim_{n\to\infty}\{x_n\}=l$ **2p**

Folosind identitatea $[x_n]=x_n-\{x_n\},\ \forall n\in\mathbb{N}$, obţine

$$[x_{n+1}]-[x_n]=(x_{n+1}-x_n)-(\{x_{n+1}\}-\{x_n\}),\ \forall n\in\mathbb{N}.$$

.... **2p**

Utilizând relaţia de mai sus deduce că şirul $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $b_n=[x_{n+1}]-[x_n],\ \forall n\in\mathbb{N}$, este convergent cu $\lim_{n\to\infty}b_n=\frac{1}{e}-(l-l)=\frac{1}{e}$ **2p**

Observă că $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathbb{Z}$ şi cum $\lim_{n\to\infty}b_n=\frac{1}{e}$, ajunge la o contradicţie. Astfel, presupunerea făcută este falsă şi deci şirul $(\{x_n\})_{n\in\mathbb{N}}$ este divergent **3p**

2. *Există matrice $A,B\in\mathcal{M}_{2018}(\mathbb{R})$ astfel încât $A^2+B^2=AB$ şi $\det(AB-BA)\neq 0$? Justificaţi răspunsul.*

Soluţie şi barem: Start **1p**

Presupune că există două matrice $A,B\in\mathcal{M}_{2018}(\mathbb{R})$ cu proprietăţile cerute. Notând $\varepsilon=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$, ţinând cont că $\varepsilon\overline{\varepsilon}=1$, $1+\overline{\varepsilon}=-\varepsilon$ şi utilizând relaţia $A^2+B^2=AB$, obţine succesiv

$$(A+\varepsilon B)\overline{(A+\varepsilon B)}=A^2+B^2+\overline{\varepsilon}AB+\varepsilon BA=(1+\overline{\varepsilon})AB+\varepsilon BA=-\varepsilon(AB-BA)\qquad(1)$$

.... **3p**

Utilizând faptul că $\det(X\cdot\overline{X})=\det(X)\cdot\overline{\det(X)}=|\det(X)|^2\in[0,\infty)\subset\mathbb{R},\forall X\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, deduce din relaţia (1) următoarele

$$\det\left[(A+\varepsilon B)\overline{(A+\varepsilon B)}\right]=\varepsilon^{2018}\det(AB-BA)\in[0,\infty)\subset\mathbb{R}$$

.... **2p**

Cum din ipoteză avem $\det(AB-BA)\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, pentru ca $\varepsilon^{2018}\det(AB-BA)\in[0,\infty)$, deduce că este necesar ca $\varepsilon^{2018}\in\mathbb{R}$ **2p**

Utilizând faptul că $\varepsilon \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ este rădăcină de ordinul trei a unităţii şi cum $3 \nmid 2018$, deduce că $\varepsilon^{2018} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Astfel concluzionează că presupunerea făcută este falsă, deci nu există matrice $A, B \in \mathcal{M}_{2018}(\mathbb{R})$ cu proprietăţile cerute **2p**

3. *Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ astfel încât $AA^\top = BB^\top = I_n$ şi $Tr(AB^\top) = n$. Arătaţi că $A^n = B^n$.*
Soluţie şi barem: Start **1p**

Folosind relaţiile $AA^\top = BB^\top = I_n$, deduce

$$(A - B)(A - B)^\top = AA^\top - AB^\top - BA^\top + BB^\top = 2I_n - (AB^\top + BA^\top) \tag{1}$$

.... **2p**

Utilizând faptul că $Tr(X) = Tr(X^\top)$, $\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ şi proprietăţile transpusei, deduce

$$Tr(BA^\top) = Tr\left[(BA^\top)^\top\right] = Tr\left[(A^\top)^\top B^\top\right] = Tr(AB^\top) \tag{2}$$

.... **1p**

Utilizând proprietatea $Tr(X + Y) = Tr(X) + Tr(Y)$, $\forall X, Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, relaţia (2) şi faptul că $Tr(AB^\top) = n$, deduce

$$Tr(AB^\top + BA^\top) = 2Tr(AB^\top) = 2n \tag{3}$$

.... **1p**

Din relaţiile (1) şi (3) deduce succesiv

$$Tr[(A - B)(A - B)^\top] = Tr(2I_n) - Tr(AB^\top + BA^\top) = 2n - 2n = 0 \tag{4}$$

.... **2p**

Arată că singura matrice $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ce verifică $Tr(XX^\top) = 0$ este matricea nulă, $X = O_n$, deduce din relaţia (4) că $A - B = O_n$ şi finalizează **3p**

4. *Determinaţi toate funcţiile continue $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ cu $f(0) = 1$ şi*

$$(f(x))^k = f(x\sqrt{k}),\ \forall k \in \mathbb{N}, \forall x \geq 0.$$

Soluţie şi barem: Start **1p**

Pentru $k \mapsto 2$ şi $x \mapsto \frac{x}{\sqrt{2}}$ obţine $f(x) = \left(f\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\right)^2 \geq 0,\ \forall x \geq 0$ **1p**

Presupune că există $x_0 > 0$ astfel încât $f(x_0) = 0$ (pentru $x_0 = 0$ avem din ipoteză $f(x_0) = 1$). Arată inductiv că

$$f\left(\frac{x_0}{(\sqrt{2})^n}\right) = 0,\ \forall n \in \mathbb{N}, \tag{1}$$

trece la limită pentru $n \to \infty$ în (1) şi din continuitatea lui f deduce că $f(0) = 0$, contrazicând ipoteza $f(0) = 1$. Obţine astfel că $f(x) > 0,\ \forall x \geq 0$

.... **2p**

Notează $F : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $F(x) = \ln f(x),\ \forall x \geq 0$ şi deduce că

$$F(x\sqrt{k}) = kF(x),\ \forall k \in \mathbb{N}, \forall x \geq 0 \tag{2}$$

.... **1p**

Pentru $k \mapsto m^2$, $m \in \mathbb{N}$, din relaţia (2) obţine

$$F(mx) = m^2 F(x),\ \forall m \in \mathbb{N}, \forall x \geq 0 \tag{3}$$

.... **0.5p**

Pentru $x \mapsto \frac{1}{n} \cdot x$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, din relaţia (3) obţine

$$F\left(\frac{m}{n}x\right) = m^2 F\left(\frac{1}{n}x\right),\ \forall m \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \forall x \geq 0 \tag{4}$$

.... **0.5p**

Pentru $x \mapsto \frac{1}{n} \cdot x$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, din relaţia (2) obţine

$$F\left(\frac{1}{n}x\right) = \frac{1}{k} F\left(\frac{\sqrt{k}}{n}x\right),\ \forall n, k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \forall x \geq 0 \tag{5}$$

şi astfel pentru $k \mapsto n^2$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, din relaţia (5) deduce

$$F\left(\frac{1}{n}x\right) = \frac{1}{n^2} F\left(x\right),\ \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \forall x \geq 0 \tag{6}$$

.... **1p**

Din relaţiile (4) şi (6) obţine

$$F\left(\frac{m}{n}x\right) = \left(\frac{m}{n}\right)^2 F\left(x\right),\ \forall m \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \forall x \geq 0$$

şi astfel deduce

$$F(q) = q^2 F(1),\ \forall q \in \mathbb{Q}_+, \tag{7}$$

unde $\mathbb{Q}_+ = \mathbb{Q} \cap [0, \infty)$ **1p**

Cum pentru orice $x \geq 0$ fixat arbitrar, există un şir $(q_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{Q}_+$ astfel încât $\lim_{n \to \infty} q_n = x$, din relaţia (7) deduce

$$F(q_n) = q_n^2 F(1),\ \forall n \in \mathbb{N} \tag{8}$$

şi astfel din continuitatea lui $F = \ln \circ f$, prin trecere la limită pentru $n \to \infty$ în (8) obţine $F(x) = x^2 F(1)$. Deduce

$$F(x) = x^2 F(1),\ \forall x \geq 0$$

.... **1p**

Notând $F(1) = c \in \mathbb{R}$, din relaţia de mai sus şi identitatea $f(x) = e^{F(x)},\ \forall x \geq 0$, obţine

$$f(x) = e^{cx^2},\ \forall x \geq 0,$$

funcţie ce verifică ipotezele problemei **1p**

Soluţii şi barem orientativ de corectare la clasa a XII-a

1. *Fie $(G,\circ)$ un grup, iar H o mulţime arbitrară cu proprietatea că există $f : G \to H$, o funcţie bijectivă. Demonstraţi că există o unică lege de compoziţie, $*$, pe H astfel încât $(H,*)$ este un grup şi f este izomorfism de grupuri.*

Soluţie şi barem: Start **1p**

Presupunem că există $f : (H,*) \to (G,\circ)$ astfel încâ t $(H,*)$ este grup şi f este izomorfism de grupuri. Atunci $f^{-1} : (G,\circ) \to (H,*)$ este de asemenea izomorfism şi

$$\Big(\forall\Big)x,y \in H\ :\ f^{-1}(x*y) = f^{-1}(x)\circ f^{-1}(y),$$

de unde

$$x*y = f(f^{-1}(x)\circ f^{-1}(y)),$$

prin urmare, dacă legea există ea este unică. **2p**

Raţionamentul de mai sus sugerează definiţia legii $*$ pe H:

$$x*y = f(f^{-1}(x)\circ f^{-1}(y)),\ x,y \in H.$$

Din această definiţie rezultă că $x,y \in H \Rightarrow x*y \in H$ **2p**

Asociativitatea: Fie $x,y,z \in H$. Avem:

$$\begin{aligned} x*(y*z) &= x*f(f^{-1}(y)\circ f^{-1}(z)) = f\Big(f^{-1}(x)\circ big(f^{-1}(y)\circ f^{-1}(z))\Big) = \\ &= f\Big((f^{-1}(x)\circ f^{-1}(y))\circ f^{-1}(z)\Big) = (x*y)*z \cdots\cdots\cdots \mathbf{1p} \end{aligned}$$

Fie $e \in G$ elementul său neutru şi $x \in H$. Atunci

$$x*f(e) = f(f^{-1}(x)\circ e) = f(f^{-1}(x)\Big) = x$$

şi analog $f(e)*x = x$, ceea ce arată că $f(e)$ este elementul neutru în H. **1p**

Pentru $x \in H$ considerăm $f\Big((f^{-1}(x))^{-1}\Big) \in H$. Avem:

$$x*f\Big((f^{-1}(x))^{-1}\Big) = f\Big(f^{-1}(x)\circ(f^{-1}(x))^{-1}\Big) = f(e),$$

ceea ce arată că $f\Big((f^{-1}(x))^{-1}\Big)$ este simetricul lui $x \in H$, deci H este grup. **1p**

Funcţia bijectivă f este un izomorfism deoarece, pentru orice $x,y \in G$ avem:

$f(x)*f(y) = f\Big(f^{-1}(f(x))\circ f^{-1}(f(x))\Big) = f(x\circ y)$ **2p**

2. a) *Demonstraţi că mulţimile*

$$\begin{aligned} A &= \{a+b\sqrt{2}\ : a,b \in \mathbb{Z}\} \\ B &= \{c+d\sqrt{3}\ : c,d \in \mathbb{Z}\}, \end{aligned}$$

împreună cu adunarea şi înmulţirea numerelor reale, sunt inele.

b) *Arătaţi că inelele A şi B nu sunt izomorfe.*

Soluţie şi barem: Start **1p**

a) Se verifică axiomele inelului **4p**

b) Presupunem că ar exista un izomorfism de inele $f : A \to B$. În A există un element α cu proprietatea $\alpha^2 = 2$. Atunci

$$f(\alpha^2) = f(2) = f(1+1) = 1+1 = 2,$$

deci $\Big(f(\alpha)\Big)^2 = 2$ **1p**

Dar B nu conţine nici un element β cu $\beta^2 = 2$ **1p**

Presupunem, prin absurd, că există $c, d \in \mathbb{Z}$ cu $(c + d\sqrt{3})^2 = 2$. Atunci

$$c^2 + 3d^2 + 2cd\sqrt{3} = 2.$$

Rezultă că $cd = 0$ şi deci $c = 0$ sau $d = 0$. Dacă $c = 0$ atunci $3d^2 = 2$, egalitate imposibilă în $\mathbb{Z}$, iar dacă $d = 0$ atunci $c^2 = 2$, $c \in \mathbb{Z}$. Contradicţie. **3p**

3. *Se consideră funcţia*

$$f : [0,\, 2\pi] \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{2+\cos x}.$$

a) Arătaţi că f admite primitive şi că orice primitivă F a lui f este strict crescătoare.

b) Calculaţi $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)\, dx$.

Soluţie şi barem: Start **1p**

a) Funcţia f este continuă, deci admite primitive **1p**

Fie F o primitivă a lui f. Atunci $F'(x) = f(x) > 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, deci F este strict crescătoare. **3p**

O primitivă F a lui f este **3p**

$$F(x) = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{\tan \frac{x}{2}}{\sqrt{3}} & ,\ x \in [0,\, \pi) \\ \frac{\pi}{\sqrt{3}} & ,\ x = \pi \\ \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{\tan \frac{x}{2}}{\sqrt{3}} + \frac{2\pi}{\sqrt{3}} & ,\ x \in (\pi,\, 2\pi] \end{cases},$$

Atunci

$$\int_0^{2\pi} f(x)\, dx = F(2\pi) - F(0) = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$ **2p**

4. *Arătaţi că*

$$\int_0^x \frac{\sin t}{1+t}\, dt > 0,$$

pentru orice $x \in [0,\, 2\pi]$.

Soluţie şi barem: Start **1p**

Definim $f : [0,\, 2\pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \int\limits_0^x \frac{\sin t}{1+t}\, dt$. Avem că $f'(x) > 0$, pentru orice $x \in (0,\, \pi)$ şi $f'(x) < 0$, pentru orice $x \in (\pi,\, 2\pi)$.

Cum $f(0) = 0$ este suficient să demonstrăm că $f(2\pi) > 0$ **4p**

Avem

$$
\begin{aligned}
f(2\pi) &= \int\limits_0^{2\pi} \frac{\sin t}{t+1}\, dt = \int\limits_0^{\pi} \frac{\sin t}{t+1}\, dt + \int\limits_{\pi}^{2\pi} \frac{\sin t}{t+1}\, dt = \\
&= \int\limits_0^{\pi} \frac{\sin t}{t+1}\, dt + \int\limits_0^{\pi} \frac{\sin(u+\pi)}{1+u+\pi}\, du = \\
&= \int\limits_0^{\pi} \frac{\sin t}{t+1}\, dt - \int\limits_0^{\pi} \frac{\sin u}{1+u+\pi}\, du = \\
&= \int\limits_0^{\pi} \left(\frac{1}{1+t} - \frac{1}{1+t+\pi}\right) \sin t\, dt > 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \mathbf{5p}
\end{aligned}
$$