OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapa locală, 8 februarie 2020
Clasa a IX-a

1. Fie $a,b,c \geq 0$ și $a+b+c=1$. Arătați că: $\dfrac{a^2}{a^3+5}+\dfrac{b^2}{b^3+5}+\dfrac{c^2}{c^3+5} \leq \dfrac{1}{4}$.

2. a) Dacă $(x_n)_{n\geq 1}$ este o progresie geometrică, se notează $S_n = x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Calculaţi S_9, ştiind că $S_3 = 40$ şi $S_6 = 60$.

b) Calculaţi suma elementelor mulţimii $B = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \left[\dfrac{2x+3}{4} \right] = 1 + \{2x\} \right\}$, unde $[a]$ şi $\{a\}$ reprezintă partea întreagă, respectiv partea fracţionară a numărului real *a*.

3. Se consideră un triunghi echilateral ABC cu $AB = 3$ şi punctele P,Q,G,R,S astfel încât: $\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{QC}$, $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$, $\overrightarrow{AR} = \overrightarrow{RG}$ şi $\overrightarrow{AS} = r \cdot \overrightarrow{SC}$.

a) Calculaţi lungimea vectorului $\vec{v} = \overrightarrow{GP} + \overrightarrow{GQ}$.

b) Arătaţi că există un număr raţional r pentru care punctele *B*,*R*, *S* sunt coliniare.

4. Se dă patrulaterul convex $ABCD$ și O intersecția diagonalelor sale, $a > 0$ și $M \in (AB), \mathrm{N} \in (BC), \mathrm{P} \in (CD), \mathrm{Q} \in (DA)$, astfel încât: $\dfrac{AM}{MB} = \dfrac{BN}{NC} = \dfrac{CP}{PD} = \dfrac{DQ}{QA} = a$.

a) Dacă $a = 1$, atunci $\overline{OM} + \overline{OP} = \overline{ON} + \overline{OQ}$.

b) Dacă $a \neq 1$ și $\overline{OM} + \overline{OP} = \overline{ON} + \overline{OQ}$, atunci $ABCD$ este paralelogram.

Timp de lucru 3 ore.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapa locală, 8 februarie 2020
Clasa a X-a

1. Să se rezolve ecuația: $\sqrt{1-x^2}=3x-4x^3$.

2. **(a)** Determinaţi numărul real m pentru care punctele A, B, C având afixele

$z_1=1+i,\ \ z_2=4\cdot i,\ \ z_3=-1+m\cdot i$ sunt puncte coliniare. $(i^2=-1)$.

(b) Arătaţi că, dacă $z\in\mathbb{C}\setminus\{-1\}$, atunci $|z|=1$ dacă şi numai dacă există un număr real a astfel încât $z=\dfrac{1+ai}{1-ai}$.

3. Arătați că:

$$\frac{1}{\log_{a_1} a_2}+\frac{1}{\log_{a_2} a_3}+\ldots+\frac{1}{\log_{a_n} a_1}\geq n,(\forall)\,a_1,a_2,\ldots,a_n\in(1,\infty)$$

4. Se consideră mulţimea M a funcţiilor injective $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ cu proprietatea că $f(x)\cdot f(1-x)=f(ax+b),\forall x\in\mathbb{R},$ unde a şi b sunt numere reale. Arătaţi că:

(a) $a=0$;

(b) $f(1-b)=1$;

(c) f nu este surjectivă;

(d) $M\neq\varnothing$.

Timp de lucru 3 ore.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapa locală, 8 februarie 2020
Clasa a XI-a

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}-2 & -2\\ -2 & -2\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

(a) Arătaţi că, pentru orice număr natural nenul *n*, există $x_n\in\mathbb{N}$ astfel încât $A^n=x_n\cdot A$;

(b) Determinaţi $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pentru care $A\cdot X=X\cdot A$;

(c) Determinaţi $Y\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pentru care $Y^3-3Y^2=A$.

2. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 2\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$. Se cere:

i) Calculați A^n;

ii) Arătați că există două matrici $B,C\in\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ pentru care $A=B^3+C^3$.

3. Fie $(x_n)_{n\geq1}$ un șir de numere reale strict pozitive, astfel încât $x_{n+1}^3<3x_n-2$. Arătați că $(x_n)_{n\geq1}$ este convergent și calculați limita sa.

4. Calculați limita $L=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1-\cos x)(1-\cos^2 x)\dots(1-\cos^n x)}{\sin^{2n}x+\ln\left(1+x^{2n}\right)+\sqrt[n]{1+x^{2n}}-1}$, pentru $n\in\mathbb{N}^*$.

Timp de lucru 3 ore.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.

Strada Ateneului Nr. 1, 320112
REŞIŢA - ROMANIA
Tel: 0255/214238; Fax: 0255/216042
e-mail: isjcaras@gmail.com
www.isjcs.ro

Str. General Berthelot nr. 28-30,
Sector 1, 010168, Bucuresti
Tel: +40 (0)21 405 57 06
Fax: +40 (0)21 310 32 05
www.edu.ro

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapa locală, 8 februarie 2020
Clasa a XII-a

1. Pe mulţimea $G=(-1,1)$ se defineşte operaţia "$*$" prin $x*y=\dfrac{x+y}{1+xy}$. Ştiind că $(G,*)$ este un grup, determinaţi numărul real m pentru care funcţia $f:(0,+\infty)\to(-1,1)$, $f(x)=\dfrac{mx-1}{x+1}$ stabileşte un izomorfism între grupurile $\left(\mathbb{R}_+^*,\cdot\right)$ şi $(G,*)$.

2. Pe mulţimea $M=(0,+\infty)$ se consideră o lege de compoziţie "$*$" care are următoarele proprietăţi:

(a) $(x*y)\cdot(x*z)=x*(y+z),\ \forall x,y,z\in M$;

(b) $x*1=x,\ \forall x\in M$.

Arătaţi că: (i) $2*4\in\mathbb{Q}$;

(ii) $4*\dfrac{1}{4}\notin\mathbb{Q}$;

(iii) $\sqrt{2020}*2020=2020^{1010}$.

3. Pentru $n\in\mathbb{N}^*$ notăm $I_n=\int x^n\sqrt{x^2+1}\,dx$.

a) Calculați I_1;

b) Stabiliți o relație de recurență pentru șirul $(I_n)_{n\geq 1}$.

4. Determinați primitivele funcției $f:\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{x^2}{(x\cdot\cos x-\sin x)(x\cdot\sin x+\cos x)}$.

Timp de lucru 3 ore.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapa locală, 8 februarie 2020
Clasa a IX-a
BAREM

1. Fie $a,b,c \geq 0$ și $a+b+c=1$. Arătați că: $\frac{a^2}{a^3+5}+\frac{b^2}{b^3+5}+\frac{c^2}{c^3+5} \leq \frac{1}{4}$.

1.	$a,b,c \geq 0$; $a+b+c=1$, deci $a,b,c \leq 1$	**(1p)**
	$\frac{a^2}{a^3+5} \leq \frac{1}{4} \Leftrightarrow a^3+(1-a^2)+(a-2)^2 \geq 0$ relație adevărată pentru că toți termenii sunt pozitivi	**(4p)**
	$\frac{a^2}{a^3+5} \leq \frac{a}{4}$; Analog celelalte	**(1p)**
	Finalizare	**(1p)**

2. a) Dacă $(x_n)_{n\geq 1}$ este o progresie geometrică, se notează $S_n = x_1+x_2+x_3+...+x_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Calculați S_9, știind că $S_3=40$ și $S_6=60$.

(b) Calculaţi suma elementelor mulţimii $B=\left\{x \in \mathbb{R} \mid \left[\frac{2x+3}{4}\right]=1+\{2x\}\right\}$, unde $[a]$ și $\{a\}$ reprezintă partea întreagă, respectiv partea fracţionară a numărului real *a*.

2.	**(a)** $S_3=40, S_6=60, \frac{S_6}{S_3}=1+q^3=\frac{3}{2} \Rightarrow q^3=\frac{1}{2}$	**(1p)**
	Din $S_1=\frac{x_1}{1-q}\left(1-q^3\right) \Rightarrow S_9=80\cdot\frac{7}{8}=70$	**(3p)**
	(b) $\{2x\}=0$; din $1 \leq \frac{2x+3}{4} < 2$ se ajunge la $x \in \left[\frac{1}{2},\frac{5}{2}\right) \Rightarrow B=\left\{\frac{1}{2},1,\frac{3}{2},2\right\}$	**(2p)**
	Suma cerută este 5	**(1p)**

3. Se consideră un triunghi echilateral ABC cu $AB=3$ şi punctele P,Q,G,R,S astfel încât: $\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{QC}$, $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$, $\overrightarrow{AR}=\overrightarrow{RG}$ şi $\overrightarrow{AS}=r\cdot\overrightarrow{SC}$.

a) Calculaţi lungimea vectorului $\vec{v}=\overrightarrow{GP}+\overrightarrow{GQ}$.

b) Arătaţi că există un număr raţional r pentru care punctele B,R,S sunt coliniare.

	(a) Desen corect (prin identificarea poziției punctelor)...	**(1p)**
	M mijlocul lui (BC) și al lui $(PQ) \Rightarrow \overrightarrow{GP}+\overrightarrow{GQ}=2\overrightarrow{GM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AM} \Rightarrow \lvert\vec{v}\rvert=\sqrt{3}$	**(3p)**
	(b) Teorema lui Menelaus pentru ΔABC şi secanta $B-R-S$ conduce la $\frac{AR}{AM}\cdot\frac{BM}{BC}\cdot\frac{SC}{SA}=1 \Rightarrow r=\frac{1}{6}$ (sau soluție vectorială)	**(3p)**

4. Se dă patrulaterul convex $ABCD$ și O intersecția diagonalelor sale, $a>0$ și $M\in(AB), N\in(BC), P\in(CD), Q\in(DA)$, astfel încât: $\frac{AM}{MB}=\frac{BN}{NC}=\frac{CP}{PD}=\frac{DQ}{QA}=a$.

a) Dacă $a=1$, atunci $\overline{OM}+\overline{OP}=\overline{ON}+\overline{OQ}$.

b) Dacă $a\neq 1$ și $\overline{OM}+\overline{OP}=\overline{ON}+\overline{OQ}$, atunci $ABCD$ este paralelogram.

	(a) în ΔOAB avem mediana $[OM] \Rightarrow \overline{OM}=\frac{\overline{OA}+\overline{OB}}{2}$ în ΔOCD avem mediana $[OP] \Rightarrow \overline{OP}=\frac{\overline{OC}+\overline{OD}}{2}$ deci $\overline{OM}+\overline{OP}=\frac{\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}+\overline{OD}}{2}$	**(1p)**
	analog $\overline{ON}+\overline{OQ}=\frac{\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}+\overline{OD}}{2}$	**(1p)**
	Finalizare	**(1p)**
	(b) $\overline{OM}=\frac{1}{a+1}\overline{OA}+\frac{a}{a+1}\overline{OB}$, $\overline{OP}=\frac{1}{a+1}\overline{OC}+\frac{a}{a+1}\overline{OD}$, $\overline{ON}=\frac{1}{a+1}\overline{OB}+\frac{a}{a+1}\overline{OC}$, $\overline{OQ}=\frac{1}{a+1}\overline{OD}+\frac{a}{a+1}\overline{OA}$	**(1p)**
	$\overline{OB}+\overline{OD}=\overline{OA}+\overline{OC}$	**(1p)**
	$\overline{CB}=\overline{DA}$	**(1p)**
	Finalizare	**(1p)**

Strada Ateneului Nr. 1, 320112
REȘIȚA - ROMANIA
Tel: 0255/214238; Fax: 0255/216042
e-mail: isjcaras@gmail.com
www.isjcs.ro

Str. General Berthelot nr. 28-30,
Sector 1, 010168, Bucuresti
Tel: +40 (0)21 405 57 06
Fax: +40 (0)21 310 32 05
www.edu.ro

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapa locală, 8 februarie 2020
Clasa a X-a
BAREM

1. Să se rezolve ecuația: $\sqrt{1-x^2}=3x-4x^3$.

1.	Condiții: $1-x^2\geq 0$; $3x-4x^3\geq 0$	**(1p)**
	Prin ridicare la pătrat obținem: $1-x^2=9x^2+16x^6-24x^4 \implies$ $16x^6-24x^4+10x^2-1=0$	**(1p)**
	Notăm $x^2=t\geq 0 \implies 16t^3-24t^2+10t-1=0$	**(1p)**
	Obținem $t_1=\frac{1}{2}$; $t_1=\frac{2+\sqrt{2}}{2}$; $t_1=\frac{2-\sqrt{2}}{2}$	**(2p)**
	Finalizare	**(2p)**

2. **(a)** Determinaţi numărul real *m* pentru care punctele *A*, *B*, *C* având afixele $z_1=1+i$, $z_2=4\cdot i$, $z_3=-1+m\cdot i$ sunt puncte coliniare. $(i^2=-1)$.

(b) Arătaţi că, dacă $z\in\mathbb{C}\setminus\{-1\}$, atunci $|z|=1$ dacă şi numai dacă există un număr real *a* astfel încât $z=\dfrac{1+ai}{1-ai}$.

2.	**(a)** $m=7$	**(2p)**
	(b) dacă $z=\dfrac{1+ai}{1-ai}\Rightarrow |z|=\dfrac{|1+ai|}{|1-ai|}=1$	**(2p)**
	Reciproc, dacă $|z|=1\Rightarrow z\cdot\bar{z}=1$, pentru $a=\dfrac{z-1}{i(z+1)}$, se obține $a=\bar{a}\Rightarrow a\in\mathbb{R}$, cu $z=\dfrac{1+ai}{1-ai}$	**(3p)**

3. Arătați că

$$\frac{1}{\log_{a_1}a_2}+\frac{1}{\log_{a_2}a_3}+\ldots+\frac{1}{\log_{a_n}a_1}\geq n,(\forall)\,a_1,a_2,\ldots,a_n\in(1,\infty)$$

	scrie $\dfrac{\lg a_1}{\lg a_2}+\dfrac{\lg a_2}{\lg a_3}+\ldots+\dfrac{\lg a_n}{\lg a_1}\geq n$	**(2p)**
	scrie ineg. med. $m_a\geq m_g \implies$	

	$\frac{\lg a_1}{\lg a_2}+\frac{\lg a_2}{\lg a_3}+\ldots+\frac{\lg a_n}{\lg a_1}\geq n\cdot\sqrt[n]{\frac{\lg a_1}{\lg a_2}\cdot\frac{\lg a_2}{\lg a_3}\cdot\ldots\cdot\frac{\lg a_n}{\lg a_1}}$	**(4p)**
	finalizare	**(1p)**

4. Se consideră mulţimea M a funcţiilor injective $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ cu proprietatea că $f(x)\cdot f(1-x)=f(ax+b),\forall x\in\mathbb{R},$ unde a şi b sunt numere reale. Arătaţi că:

(a) $a=0$;

(b) $f(1-b)=1$;

(c) f nu este surjectivă;

(d) $M\neq\varnothing$.

	(a) Pentru $x=0$, apoi $x=1\Rightarrow f(0)\cdot f(1)=f(1)f(0)=f(a)=f(a+b)\Rightarrow a=0$	**(2p)**
	(b) $f(x)\cdot f(1-x)=f(ax+b),\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow f(b)\cdot f(1-b)=f(b)$ Presupunând că $f(b)=0$ avem că $f(x)\cdot f(1-x)=0,\forall x\in\mathbb{R}$, deci $\exists x_1,x_2\in\mathbb{R},x_1\neq x_2$ cu $f(x_1)=f(x_2)$, contradicție cu injectivitatea $\Rightarrow f(b)\neq 0\Rightarrow f(1-b)=0$	**(2p)**
	(c) Dacă $\exists t\in\mathbb{R}$ cu $f(t)=0$ atunci $f(t)\cdot f(1-t)=f(b)\Rightarrow f(b)=0$, fals Așadar, $0\notin \operatorname{Im} f$ deci f nu e surjectivă	**(2p)**
	(d) Un exemplu: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=2^x$	**(1p)**

Barem – clasa a X-a

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapa locală, 8 februarie 2020
Clasa a XI-a
BAREM

<table>
<tr><td colspan="3">1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}-2 & -2\\ -2 & -2\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

(a) Arătaţi că, pentru orice număr natural nenul n, există $x_n\in\mathbb{N}$ astfel încât $A^n=x_n\cdot A$;

(b) Determinaţi $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pentru care $A\cdot X=X\cdot A$;

(c) Determinaţi $Y\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pentru care $Y^3-3Y^2=A$.</td></tr>
<tr><td>1.</td><td>(a) $x_n=(-4)^n, n\in\mathbb{N}^*$ (demonstrație)</td><td>(2p)</td></tr>
<tr><td></td><td>(b) $X=\begin{pmatrix}a & b\\ b & a\end{pmatrix}$</td><td>(1p)</td></tr>
<tr><td></td><td>(c) $Y^4-3Y^3=AY=YA\Rightarrow Y=\begin{pmatrix}a & b\\ b & a\end{pmatrix}$. Se obține, pentru $Y=\begin{pmatrix}a & b\\ b & a\end{pmatrix}$, din relația
$Y^3-3Y^2=A$, egalând elementele omoloage şi rezolvând sistemul de ecuaţii obţinut:
Soluțiile: $Y_1=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}, Y_2=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -2 & 1\end{pmatrix}, Y_3=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}, Y_4=\begin{pmatrix}\frac{5}{2} & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{5}{2}\end{pmatrix}$</td><td>(1p)
(1p)
(2p)</td></tr>
<tr><td colspan="3">2. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 2\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$. Se cere:

i) Calculați A^n;

ii) Arătați că există două matrici $B,C\in\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ pentru care $A=B^3+C^3$.</td></tr>
<tr><td>2.</td><td>(a) $A^2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -3 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1-2^2 & 2^2\end{pmatrix}$

$A^n=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1-2^n & 2^n\end{pmatrix}, (\forall)n\in\mathbb{N}^*$</td><td>(1p)

(2p)</td></tr>
<tr><td></td><td>(b) $A^2-trA\cdot A+\det A\cdot I_2=O_2$
$A^2-3\cdot A+2\cdot I_2=O_2$
$A^3-3\cdot A^2+2\cdot A=O_2$</td><td>(1p)</td></tr>
</table>

	$A^3-3\cdot A^2+2\cdot A-A^2+3\cdot A-2\cdot I_2=O_2$ $(A-I_2)^3=(A-I_2)^2$	**(1p)**
	$(A-I_2)^2=(A-I_2)$	**(1p)**
	$(A-I_2)^3=A-I_2 \Rightarrow A=(A-I_2)^3+I_2$ $B=A-I_2$, $C=I_2$	**(1p)**
3. Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ un șir de numere reale strict pozitive, astfel încât $x_{n+1}^3<3x_n-2$. Arătați că $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent și calculați limita sa.		
	$x_{n+1}^3-x_n^3<-x_n^3+3x_n-2=-(x_n+2)(x_n-1)^2\leq 0$	**(2p)**
	$x_{n+1}\leq x_n \Rightarrow (x_n)_{n\geq 1}$ strict descrescător	**(1p)**
	$x_n>0,(\forall)n\in\mathbb{N}^* \Rightarrow x_n\in(0,1)$ Deci $(x_n)_{n\geq 1}$ mărginit, deci convergent	**(1p)**
	Trecând la limită $\Rightarrow l^3\leq 3l-2, l\geq 0$	**(1p)**
	Finalizare $l=1$	**(2p)**
4. Calculați limita $L=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1-\cos^2 x)...(1-\cos^n x)}{\sin^{2n}x+\ln(1+x^{2n})+\sqrt[n]{1+x^{2n}}-1}$, pentru $n\in\mathbb{N}^*$.		
	$L=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1-\cos^2 x)...(1-\cos^n x)}{x^{2n}}\cdot\frac{x^{2n}}{\sin^{2n}x+\ln(1+x^{2n})+\sqrt[n]{1+x^{2n}}-1}=L_1\cdot L_2$	**(1p)**
	$L_1=\lim\limits_{x\to 0}\prod\limits_{k=1}^{n}\frac{1-\cos^k x}{x^2}=\prod\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{2}=\frac{n!}{2^n}$	**(3p)**
	$L_2=\frac{1}{1+1+\frac{1}{n}}=\frac{n}{2n+1}$	**(1p)**
	$L_2=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\frac{\sin^{2n}x}{x^{2n}}+\frac{\ln(1+x^{2n})}{x^{2n}}+\frac{(1+x^{2n})^{\frac{1}{n}}-1}{x^{2n}}}$	**(1p)**
	Finalizare	**(1p)**

Barem – clasa a XI-a

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapa locală, 8 februarie 2020
Clasa a XII-a
BAREM

1. Pe mulţimea $G=(-1,1)$ se defineşte operaţia $"*"$ prin $x*y=\dfrac{x+y}{1+xy}$. Ştiind că $(G,*)$ este un grup, determinaţi numărul real m pentru care funcţia $f:(0,+\infty)\to(-1,1), f(x)=\dfrac{mx-1}{x+1}$ stabileşte un izomorfism între grupurile $(\mathbb{R}_+^*,\cdot)$ şi $(G,*)$.		
1.	Se deduce că $m=1$	**(2p)**
	Se verifică faptul că f morfism de grupuri	**(3p)**
	Se verifică faptul că f este bijectivă	**(2p)**
2. Pe mulţimea $M=(0,+\infty)$ se consideră o lege de compoziţie $"*"$ care are următoarele proprietăţi: **(a)** $(x*y)\cdot(x*z)=x*(y+z),\ \forall x,y,z\in M$; **(b)** $x*1=x,\ \forall x\in M$. Arătaţi că: (i) $2*4\in\mathbb{Q}$; (ii) $4*\dfrac{1}{4}\notin\mathbb{Q}$; (iii) $\sqrt{2020}*2020=2020^{1010}$.		
2.	(i) $y=z=1\Rightarrow x^2=x*2,\quad y=z=2\Rightarrow(x*2)^2=x*4$ sau $x^4=x*4\Rightarrow 2*4=16\in\mathbb{Q}$	**(2p)**
	(ii) $y=z=\dfrac{1}{2}$, apoi $y=z=\dfrac{1}{4}$ și obținem $4*4=\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$	**(2p)**
	(ii) Inductiv se arată că $x^n=x*n,\forall n\in\mathbb{N}^*$	**(2p)**
	Pentru $x=\sqrt{2020},n=2020$ obținem concluzia cerută	**(1p)**

3. Pentru $n\in\mathbb{N}^*$ notăm $I_n=\int x^n\sqrt{x^2+1}dx$. a) Calculați I_1; b) Stabiliți o relație de recurență pentru șirul $(I_n)_{n\geq1}$.		
3.	a) Se not. $t=x^2+1\Rightarrow dt=2xdx$	**(1p)**

	$I=\frac{1}{2}\int\sqrt{t}dt=\frac{t^{\frac{3}{2}}}{3}+C$	**(1p)**
	Finalizare $I_1=\frac{\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}{3}+C$	**(1p)**
	b) $I_n=\int\frac{x^{n+2}}{\sqrt{x^2+1}}dx+=I+I'$	**(1p)**
	$I=x^{n+1}\sqrt{x^2+1}-(n+1)I_n$	**(1p)**
	$I'=x^{n-1}\sqrt{x^2+1}-(n-1)I_{n-2}$	**(1p)**
	Finalizare $I_n=\frac{1}{n+2}\left(x^{n-1}\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}-(n-1)I_{n-2}\right)$	**(1p)**
	4. Determinați primitivele funcției $f:\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{x^2}{(x\cdot\cos x-\sin x)(x\cdot\sin x+\cos x)}$.	
4.	Notăm $f_1(x)=x\cdot\cos x-\sin x$ și $f_2(x)=x\cdot\sin x+\cos x$	**(2p)**
	$f_1(x)\cdot f_2'(x)-f_1'(x)\cdot f_2(x)=x^2$ $I=\int f(x)dx=\int\frac{f_1(x)\cdot f_2'(x)-f_1'(x)\cdot f_2(x)}{f_1(x)\cdot f_2(x)}dx$	**(2p)**
	$I=\int\frac{f_2'(x)}{f_2(x)}dx-\int\frac{f_1'(x)}{f_1(x)}dx$	**(1p)**
	$I=\ln\left\|f_2(x)\right\|-\ln\left\|f_1(x)\right\|+C$	**(1p)**
	$I=\ln\left\|x\cdot\sin x+\cos x\right\|-\ln\left\|x\cdot\cos x-\sin x\right\|$	**(1p)**

Strada Ateneului Nr. 1, 320112
REȘIȚA - ROMANIA
Tel: 0255/214238; Fax: 0255/216042
e-mail: isjcaras@gmail.com
www.isjcs.ro

Str. General Berthelot nr. 28-30,
Sector 1, 010168, Bucuresti
Tel: +40 (0)21 405 57 06
Fax: +40 (0)21 310 32 05
www.edu.ro