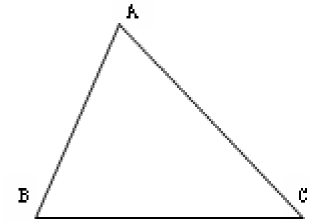
Capitolul XI
TRIUNGHIUL

1) Triunghiul – este format din unirea a trei puncte necoliniare. Se notează ΔABC.

Obs.: laturile triunghiului sunt $[AB]=c,[BC]=a,[AC]=b$,
unghiurile sunt $\sphericalangle ABC=\sphericalangle B,$
$\sphericalangle BCA=\sphericalangle C,\sphericalangle CAB=\sphericalangle A$



Obs.2: perimetrul unui triunghi este format din suma laturilor sale, deci $P_{\Delta ABC}=a+b+c$, iar semiperimetrul este $p_{\Delta ABC}=\dfrac{a+b+c}{2}$

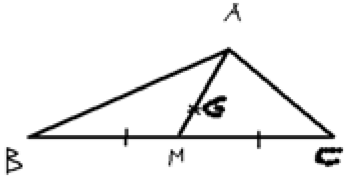
Obs.3: Pentru ca 3 numere reale a,b,c să fie laturile unui triunghi, trebuie ca ele să verifice inegalităţile: $a<b+c,b<c+a,c<a+b$
(numite inegalităţile triunghiului)

*Obs.4:*suma unghiurilor unui triunghi este 180°

Obs.5: în orice triunghi, inegalitatea dintre unghiuri este echivalentă cu inegalitatea dintre laturi, adică
$a<b<c\Leftrightarrow m(\sphericalangle A)<m(\sphericalangle B)<m(\sphericalangle C)$

2) Linii importante în triunghi - sunt mediana, înălţimea, bisectoarea, mediatoarea

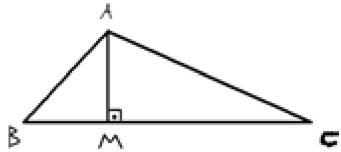
a)mediana: uneşte vârful unui triunghi cu mijlocul laturii opuse, medianele se intersecteaza în "**G**" numit centru de greutate, situat la $\frac{1}{3}$ de bază şi $\frac{2}{3}$ de vârf.



Obs.: $\frac{GM}{GA}=\frac{1}{2}, GM=\frac{1}{3}AM, AG=\frac{2}{3}AM$

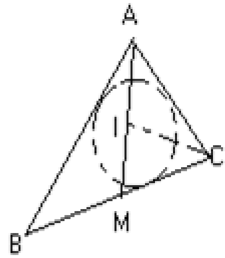
Obs.: orice mediană împarte triunghiul în două triunghiuri de arii egale.

b)înălţimea : perpendiculara din vârf pe latura opusă, se intersectează în "**H**" -ortocentru



Obs 1 : $h_1 \cdot b_1 = h_2 \cdot b_2 = h_3 \cdot b_3$

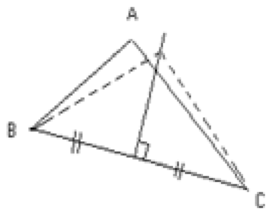
c) bisectoarea – împarte unghiul în 2 părţi egale, se intersectează în "**I**", numit cercul cercului înscris



Obs 1: Teorema bisectoarei : $\frac{AB}{AC}=\frac{BM}{MC}$

Obs 2: Distanţele de la "**I**" la cele 3 laturi sunt egale (de fapt sunt egale cu **r** - raza cercului înscris)

d)mediatoarea – perpendiculara pe mijlocul laturii, se intersectează în "**O**", numit cercul cercului circumscris



Obs 1: Distantele de la oricare punct de pe mediatoare la capetele segmentului sunt egale

Obs 2: Distanţele de la O la vârfurile triunghiului sunt egale (de fapt sunt egale cu **R**-raza cercului circumscris)

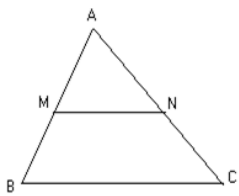
3) Linia mijlocie in triunghi – este segmentul care uneşte mijloacele a două laturii opuse

Obs.: următoarele afirmaţii sunt echivalente:

a)un segment e linie mijlocie într-un triunghi

b)uneşte mijloacele a două laturi

c)trece prin mijlocul unei laturi, este în interiorul triunghiului şi este paralelă cu a treia



4) Clasificarea triunghiului după măsura unghiurilor sale:

a) ΔABC **este ascuţitunghi** dacă ΔABC aretoate unghiurile sale sunt ascuţite, adică au măsura mai mică decât $90°$

b) ΔABC **este dreptunghic** dacă ΔABC areun unghi cu măsura de $90°$

c) ΔABC **este obtuzunghic** dacă ΔABC areun unghi cu măsura mai mare decât $90°$

5) Clasificarea triunghiului după măsura laturilor sale:

a) ΔABC **este oarecare (scalen)** dacă ΔABC dacă laturile au lungime oarecare

b) ΔABC **este isoscel** dacă ΔABC are 2 laturi congruente

c) ΔABC **este echilateral** dacă ΔABC toate laturile congruente între ele.

Obs.: orice triunghi echilateral este triunghi isoscel

6) Triunghiul isoscel - următoarele afirmaţii sunt echivalente:

a) ΔABC este isoscel
b) ΔABC are două laturi congruente
c) ΔABC are două unghiuri congruente
d) ΔABC are o mediană care coincide cu o înălţime
e) ΔABC are o mediană care coincide cu o bisectoare
f) ΔABC are o mediană care coincide cu o mediatoare
g) ΔABC are o înălţime care coincide cu o bisectoare
h) ΔABC are o înălţime care coincide cu o mediatoare
i) ΔABC are o bisectoare care coincide cu o mediatoare

7) Triunghiul echilateral - următoarele afirmaţii sunt echivalente:

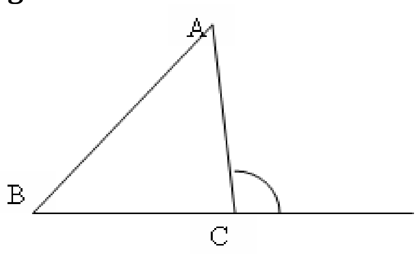
a) ΔABC este echilateral
b) ΔABC toate laturile congruente
c) ΔABC are toate unghiurile congruente
d) ΔABC este isoscel cu un unghi de $60°$
e) ΔABC are două unghiuri egale cu $60°$

8) Unghiul exterior unui triunghi

-este unghiul format de o latură a unui triunghi şi prelungirea altei laturi.

Obs.: un unghi exterior este egal cu suma unghiurilor interioare nealăturate lui

$m(\sphericalangle extC)=m(\sphericalangle A)+m(\sphericalangle B)$



Obs.: bisectoarea unghiului exterior al unui triunghi este perpendiculară pe bisectoarea unghiului interior adiacent lui.

9) Congruenţa triunghiurilor – două triunghiuri sunt congruente dacă au toate laturile şi toate unghiurile respectiv congruente, adică $\Delta ABC \equiv \Delta MNP \Leftrightarrow AB \equiv MN, BC \equiv NP, CA \equiv PM,$ $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle M, \sphericalangle B \equiv \sphericalangle N, \sphericalangle C \equiv \sphericalangle P.$ Pentru a nu arăta întotdeauna 6 congruenţe, sunt criteriile (cazurile) de congruenţă:

10) Cazuri de congruenţă

a) (L U L) dacă două triunghiuri au două laturi respectiv congruente şi unghiurile dintre ele congruente, atunci cele două triunghiuri sunt congruente

b) (U L U) dacă două triunghiuri au două unghiuri respectiv congruente şi laturile dintre ele congruente, atunci cele două triunghiuri sunt congruente

c) (L L L) dacă două triunghiuri au toate trei laturile respectiv congruente, atunci cele două triunghiuri sunt congruente

Obs: Dacă $AB \equiv MN, \sphericalangle B \equiv \sphericalangle N, \sphericalangle C \equiv \sphericalangle P$ avem situaţia (U U L) , acesta nu e caz, dar folosind suma unghiurilor se aduce la cazul (U L U).

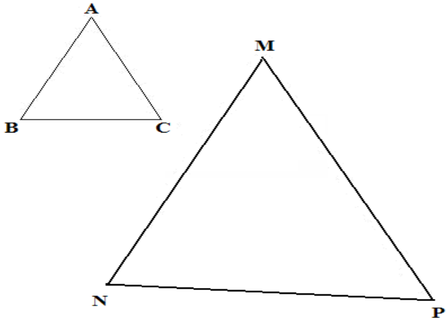
11) Asemănarea triunghiurilor – două triunghiuri sunt asemenea

dacă au toate laturile respectiv proporţionale şi toate unghiurile respectiv congruente, adică

$\Delta ABC \sim \Delta MNP$

$\Leftrightarrow \dfrac{AB}{MN} = \dfrac{BC}{NP} = \dfrac{CA}{PM}$

$\sphericalangle A \equiv \sphericalangle M, \sphericalangle B \equiv \sphericalangle N, \sphericalangle C \equiv \sphericalangle P$



Pentru a nu arăta întotdeauna 6 relaţii, sunt criteriile (cazurile) de asemănare:

12) Cazuri de asemănare:

a) (U U) dacă cele două triunghiuri au două unghiuri congruente, atunci triunghiurile sunt asemenea

b) (L U L) dacă cele două triunghiuri au un câte un unghi congruent şi laturile care-l alcătuiesc respectiv proporţionale

c) (L L L) cele două triunghiuri au toate trei laturile respectiv proporţionale

Exp.: $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$ daca avem unul din cazurile

(UU): $m(\angle B) = m(\angle B')$ si $m(\angle A) = m(\angle A')$

(LUL): $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{BC}{B'C'}$ si $m(\angle B) = m(\angle B')$

Obs: unghiul trebuie obligatoriu dintre laturi

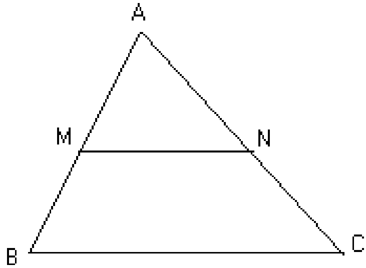
(LLL): $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{BC}{B'C'} = \dfrac{AC}{A'C'}$

13) Teorema lui Thales

În ΔABC, dacă $MN \parallel BC \Rightarrow$

$$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$$

Obs.: o paralelă la una din laturile unui triunghi determină pe celelalte două laturi segmente proporţionale.



Reciproca teoremei lui Thales:

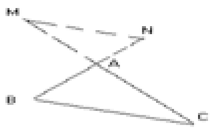
În ΔABC, dacă $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} \Rightarrow MN \parallel BC$

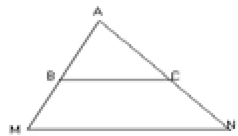
Obs.: Se aplica pentru MN deasupra de A sau sub BC

Exp.:

$MN \parallel BC$

$$\Rightarrow \frac{AB}{AN} = \frac{AC}{AM}$$





Obs.1: La T. Thales, folosind proporţii derivate, se pot lua orice alte raporturi egale

Exp: $MN \parallel BC \Leftrightarrow \frac{AB}{AM} = \frac{AC}{AN}$ sau $\frac{AB}{MB} = \frac{AC}{NC}$

14) Teorema fundamentală a asemănării

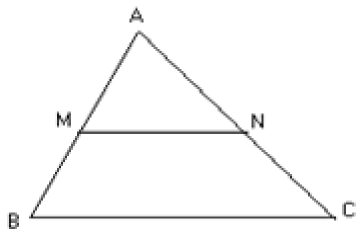
În ΔABC, dacă $MN \parallel BC \Rightarrow$

$\Delta ABC \sim \Delta MNP$

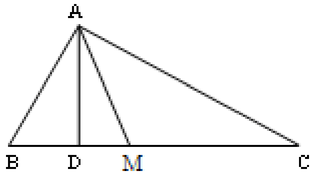
Obs.: Teorema mai este cunoscută şi sub forma

În ΔABC, dacă $MN \parallel BC$

$$\Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$



15) Triunghi dreptunghic



Triunghiul ABC e dreptunghic $\Leftrightarrow$ triunghiul ABC are un unghi drept

Obs.: în cazul nostru, ΔABC dreptunghic $\Leftrightarrow$ $m(\sphericalangle A)=90^\circ$

Obs.: latura care se opune unghiului de 90° se numeşte ipotenuză, iar celelalte două laturi se numesc catete

16) Cazurile de congruenţă ale triunghiurilor dreptunghice:

a) cazul (CC)-dacă două triunghiuri dreptunghice au cele două catete respectiv congruente, atunci cele două triunghiuri sunt congreunte

b)cazul (IC)- dacă două triunghiuri au ipotenuzele congruente şi o catetă congruentă, atunci cele două triunghiuri sunt congruente

c)cazul (IU) – dacă două triunghiuri au ipotenuzele congruente şi un unghi ascuţit congruent, atunci cele două triunghiuri sunt congruente

d)cazul (CU) – dacă două triunghiuri au câte o catetă congruentă şi câte un unghi ascuţit congruent, atunci cele două triunghiuri sunt congruente

17) Proprietăţi în triunghiul dreptunghic:

a)T.lui Pitagora ΔABC dreptunghic $\Rightarrow BC^2 = AB^2 + AC^2$

(ΔABC dreptunghic $\Rightarrow ip^2 = (cateta_1)^2 + (cateta_2)^2$)

b) reciproca teoremei lui Pitagora: dacă $BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow$ ΔABC dreptunghic cu $m(\sphericalangle A)=90^\circ$

c)T.înălţimii: ΔABC dreptunghic $\Rightarrow AD^2 = BD \cdot CD$

(ΔABC dreptunghic $\Rightarrow h^2 = proiectia_1 \cdot proiectia_2$)

d)T. catetei: ΔABC dreptunghic $\Rightarrow AB^2 = BD \cdot BC$

($cateta^2 = ipotenuza \cdot proiecţia\ celeilalte\ catete\ pe\ ipotenuză$)

18) Proprietatea înălţimii:

$$\Delta ABC \text{ dreptunghic} \Rightarrow AD = \frac{AB \cdot AC}{BC} \left(h_{\sphericalangle \text{drept}} = \frac{c_1 \cdot c_2}{ip} \right)$$

19) Proprietatea medianei din unghiul drept

ΔABC dreptunghic $\Leftrightarrow \ AM = \dfrac{BC}{2}$, unde AM – mediană (dacă ΔABC este dreptunghic, atunci mediana din vârful drept este jumătate din ipotenuză şi reciproc, dacă într-un triunghi o mediană este jumătate din latura pe care cade, atunci triunghiul este dreptunghic, cu unghiul drept în vârful de unde porneşte mediana)

20) Teorema unghiului de 30º- dacă ΔABC dreptunghic şi $m(\sphericalangle C) = 30° \Leftrightarrow AB = \dfrac{BC}{2}$ (într-un triunghi dreptunghic, cateta ce se opune unghiului de 30º este jumătate din ipotenuză şi reciproc, dacă într-un triunghi o catetă este jumătate din ipotenuză, atunci unghiul ce se opune acelei catete este de 30º)

21) Metode de a arăta că un triunghi este dreptunghic:

met.I: dacă $a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow m(\sphericalangle A) = 90°$ (reciproca teoremei lui Pitagora)

met II: arătăm că are un unghi cu măsura de $90°$

22) Trigonometrie în triunghi dreptunghic

$\sin = \dfrac{\text{cateta opusă}}{\text{ipotenuză}}$; $\cos = \dfrac{\text{cateta alăturată}}{\text{ipotenuză}}$;

$tg = \dfrac{\text{cateta opusă}}{\text{cateta alăturată}}$; $\text{ctg} = \dfrac{\text{cateta alăturată}}{\text{cateta opusă}}$

Obs.: $tg = \dfrac{\sin}{\cos}; ctg = \dfrac{\cos}{\sin}$

23) Formula fundamentală a trigonometriei ΔABC dreptunghic cu $m(\sphericalangle A) = 90° \Rightarrow \sin^2(\sphericalangle B) + \cos^2(\sphericalangle B) = 1, \sin^2(\sphericalangle C) + \cos^2(\sphericalangle C) = 1$

24) Tabelul cu funcţii trigonometrice

	0^o	30^o	45^o	60^o	90^o
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tg	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	\ (nu există)
ctg	\ (nu exista)	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
Linie constructie	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$

E1) În linia de construcţie punem cifrele 0; 1; 2; 3; 4

E2) extragem radical din aceste numere $\sqrt{0};\sqrt{1};\sqrt{2};\sqrt{3};\sqrt{4}$

E3) împărţim aceşti radicali la 2, adică $\frac{\sqrt{0}}{2};\frac{\sqrt{1}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{\sqrt{4}}{2}$

E4) cu aceste rezultate completăm linia lui ***sin*** $\Rightarrow 0;\frac{1}{2};\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};1$

E5) linia lui ***cos*** conţine valorile lui ***sin*** în ordine inversă:

$1;\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{1}{2};0$

E6) pe linia lui *tg* folosim $tg=\frac{\sin}{\cos}$, iar pe linia lui *ctg* scriem rezultatele de la tg în ordine inversă

25) Rezolvarea triunghiului dreptunghic - însemnă determinarea tuturor elementelor unui triunghi dacă ştim trei elemente

- se aplică sin, cos, tg, ctg şi t. Pitagora, t. catetei, t. Înălţimii

26) Determinarea tipului de unghi într-un triunghi cunoscând laturile

Dacă $l_1^{\ 2} < l_2^{\ 2} + l_3^{\ 2} \Rightarrow$ unghiul opus lui l_1 este ascutit

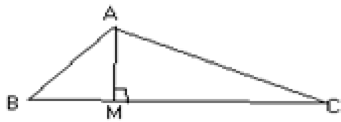
Dacă $l_1^{\ 2} = l_2^{\ 2} + l_3^{\ 2} \Rightarrow$ unghiul opus lui l_1 este drept

Dacă $l_1^{\ 2} > l_2^{\ 2} + l_3^{\ 2} \Rightarrow$ unghiul opus lui l_1 este obtuz

27) * Determinarea înălţimii într-un triunghi oarecare dacă ştim laturile – cunoaştem $AB = c, BC = a, AC = b$

E1) notăm $BM = x \Rightarrow CM = BC - x$

E2) exprimăm AM cu Pitagora în ΔABM şi ΔACM, astfel în $\Delta ABM, AM^2 = AB^2 - BM^2$



$\Rightarrow AM^2 = c^2 - x^2$, iar în

$\Delta ACM, AM^2 = AC^2 - CM^2 \Rightarrow AM^2 = b^2 - (a-x)^2$

E3) egalăm AM^2 din cele 2 exprimări $c^2 - x^2 = b^2 - (a-x)^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow c^2 - \cancel{x^2} = b^2 - a^2 + 2ax - \cancel{x^2} \Rightarrow x = \frac{c^2 - b^2 + a^2}{2a}$$

E4) înlocuim valoarea lui x într-una din exprimările de mai sus, spre exemplu în $AM^2 = c^2 - x^2 \Rightarrow AM^2 = c^2 - \left(\frac{c^2 - b^2 + a^2}{2a}\right)^2$

28) Aria unui triunghi:

$$A_{\Delta ABC}=\frac{b\cdot h}{2}=\frac{l_1\cdot l_2\cdot\sin\left(\sphericalangle\left(l_1,l_2\right)\right)}{2}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$ **,** unde

$p=\dfrac{a+b+c}{2}$ este semiperimetrul triunghiului.

Obs.1: $A_{\Delta ABC}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ e numeşte **formula lui Heron**

Obs. 2: formula lui Heron se foloseste dacă *a,b,c* sunt laturi fără radicali, daca *a,b,c* au radicali, găsim înălţimea cunoscând laturile $\Rightarrow A_{\Delta ABC}=\dfrac{b\cdot h}{2}$

Obs.:3: ΔABC este dreptunghic $\Rightarrow A=\dfrac{c_1\cdot c_2}{2}$

Obs.4: Aria triunghiului echilateral $=\dfrac{l^2\sqrt{3}}{4}$

29)