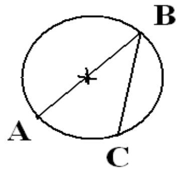
Capitolul XIII
CERCUL

1) Cercul: mulţimea punctelor egal depărtate de un punct fix numitcentrul cercului.

Distanţa oricărui punct de pe cerc la centru se numeşte raza cercului, notată r

Obs. : cercul este doar linia curbă care îl alcătuieşte, iar **discul** este acea linie curbă împreună cu interiorul său.



Elementele cercului:

a) raza cercului - segmentul care uneşte centrul cercului cu un punct de pe cerc (toate razele sunt egale). Se notează cu r

b) diametrul cercului – este coarda care trece prin centrul cercului, are lungimea egală cu $2r$

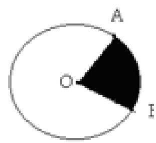
c) coarda – este segmentul care uneşte două puncte ale cercului

d) arc de cerc – porţiunea din cerc delimitată de două puncte de pe cerc

e) semicerc – porţiune din cerc delimitată de două puncte diametral opuse.

Exp.: $OA \rightarrow$ rază , $BA \rightarrow$ diametru, $AC \rightarrow$ coardă, $AC \rightarrow$ arc de cerc, $ABC \rightarrow$ arcul mare AC , $AB \rightarrow$ semicerc

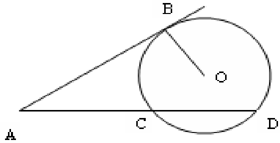
f) sector de cerc – porţiunea din interiorul cercului cuprinsă între 2 raze, în cazul nostru porţiunea haşurată, sectorul AOB



2) Tangentă, secantă

a) tangenta – dreapta care are un singur punct comun cu cercul

Obs. : tangenta este perpendiculara pe rază in punctul de contact



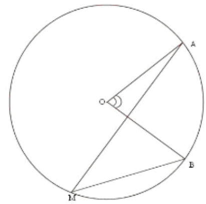
Exp. : AB este tangentă şi cum BO este rază $AB \perp BO$

b) secanta - dreapta care are un două puncte comune cu cercul
Exp. : AD este secantă.

3) Unghi la centru, unghi înscris în cerc

a)unghi la centru – are vârful în centru cercului, iar laturile lui sunt raze şi are măsura egală cu a arcului subîntins,

$$m(\angle AOB) = m\left(\overset{\frown}{AB}\right)$$

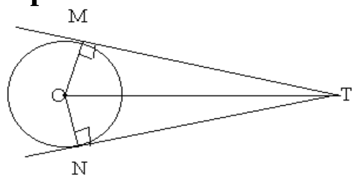


b) Unghi înscris in cerc - are vârful pe cerc, iar laturile lui sunt coarde şi are măsura egală cu jumătate din a arcului subîntins,

$$m(\angle AMB) = \frac{m\left(\overset{\frown}{AB}\right)}{2}$$

3) Proprietăți:

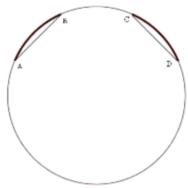
a) Tangentele duse la un cerc dintr-un punct exterior sunt congruente – dacă TM, TN sunt tangente din punctul T, atunci $TM \equiv TN$. Se arată uşor că $\Delta TMO \equiv \Delta TNO(IC) \Rightarrow TM \equiv TN$



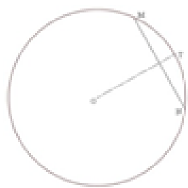
b) arce congruente corespund coarde congruente şi reciproc

$$\overset{\frown}{AB} \equiv \overset{\frown}{CD} \Rightarrow AB = CD$$

$$AB = CD \Rightarrow \overset{\frown}{AB} \equiv \overset{\frown}{CD}$$

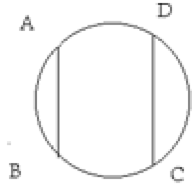


c) Orice rază perpendiculară pe o coardă o înjumătăţeşte şi reciproc, dacă o rază înjumătăţeşte o coardă, atunci ea este perpendiculară pe coarda respectivă



d) arcele de cerc cuprinse între două coarde paralele sunt congruente şi reciproc

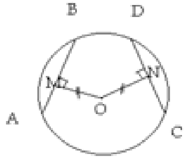
$AB \parallel CD \Rightarrow \overset{\frown}{AD} \equiv \overset{\frown}{BC}$



e) coardele egal depărtate de centru sunt egale şi reciproc

$OM \equiv ON \Rightarrow AB \equiv CD$

$AB \equiv CD \not\Rightarrow OM \equiv ON$



4) Puncte conciclice, poligoane inscriptibile, patrulater inscriptibil

a) puncte conciclice – există un cerc care trece prin acele puncte

b) un poligon este inscriptibil – vârfurile sale sunt situate pe un cerc

c)un patrulater este inscriptibil - vârfurile sale sunt situate pe un cerc

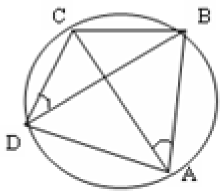
Obs.: următoarele afirmaţii sunt echivalente:

a) patrulaterul $ABCD$ -este inscriptibil

b) o pereche de unghiurile opuse sunt suplementare, adică

$m(\sphericalangle A) + m(\sphericalangle C) = 180°$ sau

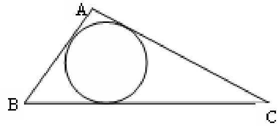
$m(\sphericalangle B) + m(\sphericalangle D) = 180°$



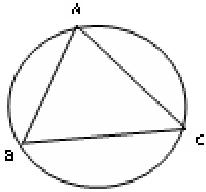
c)un unghi format de o latură cu o diagonală este congruent cu un unghi formate de cealaltă diagonală cu latura opusă, adică $\sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle BDC$

5) Cerc înscris, cerc circumscris unui triunghi

a) un cerc este înscris într-un triunghi dacă laturile triunghiului sunt tangente la acel cerc (cercul este interior triunghiului, triunghiul este circumscris cercului). Centrul cercului înscris se găseşte la intersecţia bisectoarelor triunghiului



b) un cerc este circumscris unui triunghi dacă acel cerc trece prin vârfurile triunghiului (cercul este circumscris triunghiului, triunghiul este înscris în cerc).
Centrul cercului circumscris se găseşte la intesecţia mediatoarelor triunghiului.



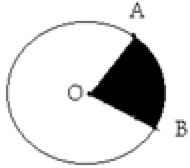
6) Lugimea şi aria cercului şi a sectorului de cerc

a) lungimea cercului - $L = 2\pi \cdot R$

b)aria cercului - $A = \pi \cdot R^2$

c)lungimea arcului de cerc

$$L_{AB} = \frac{2\pi \cdot R \cdot m(\sphericalangle_{centru})}{360^\circ} \Rightarrow L_{AB} = \frac{\pi \cdot R \cdot m(\sphericalangle_{centru})}{180^\circ}$$



d)aria sectorului circular

$$A_{sector} = \frac{\pi \cdot R^2 \cdot m(\sphericalangle_{centru})}{360^\circ}$$

7) Elementele importante în poligoanele regulate

a) latura, notată cu ***l***

b)apotemă – reprezintă distanţa de la centru la una din laturi(într-un poligon regulat, apotemele sunt congruente), se notează cu ***a*, e**ste aceeaşi cu raza cercului înscris

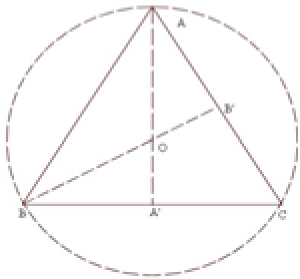
c)raza cercului circumscris – este lungimea segmentului ce uneşte centrul cercului circumscris cu unul din vârfuri, se notează cu ***R***

d)perimetru – este suma laturilor, se notează cu ***P***

e)aria – se notează cu ***A***

8) deducerea elementelor în triunghi echilateral (este poligonul regulat cu trei laturi)

înălţimea : $h_3 = \frac{l_3 \cdot \sqrt{3}}{2}$, (se face teorema lui Pitagora în $\Delta ABA'$ şi folosim că $BA' = \frac{l_3}{2}$)



apotema: $a_3 = \dfrac{l_3 \cdot \sqrt{3}}{6} = r_3, OA' = OB' = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{l_3 \cdot \sqrt{3}}{2}$, adică folosim faptul că centrul triunghiului echilateral, deoarece este şi centru de greutate, este o treime de bază din înălţime

raza cercului circumscris: $R_3 = \dfrac{l_3 \cdot \sqrt{3}}{3}$, căci $R_3 = OA = OB =$

$= \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{l_3 \cdot \sqrt{3}}{2} = \dfrac{l_3 \cdot \sqrt{3}}{3}$ adică folosim că centrul triunghiului echilateral, deoarece este şi centru de greutate, este la două treimi de vârf din înălţime

Perimetru - $P_3 = 3 \cdot l_3$

Aria $A_3 = \dfrac{(l_3)^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$, căci $A_3 = \dfrac{b \cdot h}{2} = \dfrac{l_3 \cdot \dfrac{l_3 \cdot \sqrt{3}}{2}}{2} = \dfrac{(l_3)^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$

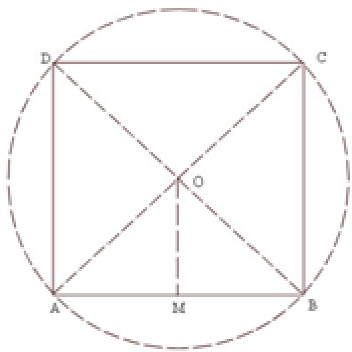
Obs.: putem exprima şi latura în funcţie de aceste elemente, de exemplu, o să determinăm l_3 în funcţie de a_3. Astfel,

$$\Rightarrow a_3 = \frac{l_3 \cdot \sqrt{3}}{6} \Rightarrow l_3 = \frac{6 \cdot a_3}{\sqrt{3}} = \frac{6a_3\sqrt{3}}{3} \Rightarrow l_3 = 2a_3\sqrt{3}$$

9) Deducerea elementelor în pătrat (este poligonul regulat cu patru laturi)

diagonala - $d = l_4 \cdot \sqrt{2}$, căci facem teorema lui Pitagora în ΔABC cu $AB = BC = l_4$

apotema - $a_4 = \dfrac{l_4}{2} = r_4$, căci



apotema OM este linie mijlocie în ΔBDA, deci e jumătate din bază

Raza cercului circumscris: $R_4 = \frac{l_2 \cdot \sqrt{2}}{2}$, căci e jumătate din diagonală

Perimetru - $P_4 = 4 \cdot l_4$

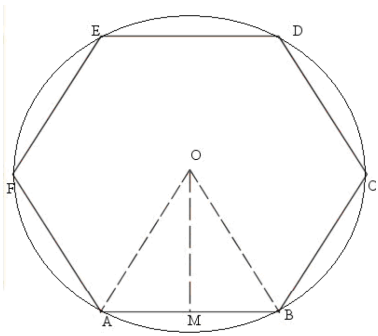
Aria $A = l^2 = \frac{BD \cdot AC}{2}$, căci orice pătrat e dreptunghi, deci aria este $A_4 = L \cdot l$ şi orice pătrat are diagonalele perpendiculare, deci $A_4 = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$

10) Deducerea elementelor în hexagonul regulat (este poligonul regulat cu şase laturi)

hexagonul poate fi împărţit în şase triunghiuri echilaterale, deci apotema sa este înălţime într-un triunghi echilateral,

apotema - $a_6 = \frac{l_6 \cdot \sqrt{3}}{2} = r_6$

Raza cercului circumscris: $R_6 = l_6$



perimetrul - $P_6 = 6 \cdot l_6$

aria $A_6 = \frac{3(l_6)^2 \cdot \sqrt{3}}{2}$ căci hexagonul poate fi împărţit în şase triunghiuri echilaterale, $A_6 = 6 \cdot A_{\Delta AOB} = \cancel{6} \cdot \frac{(l_6)^2 \cdot \sqrt{3}}{\cancel{4}} = \frac{3(l_6)^2 \cdot \sqrt{3}}{2}$

11) Tabel cu exprimarea elementelor în poligoanele regulate cu trei, patru şi cu şase laturi

	triunghi echilateral	**pătrat**	**hexagon regulat**
Elemente specifice	înălţimea $h_3 = \frac{l_3 \cdot \sqrt{3}}{2}$	diagonala $d = l_4 \cdot \sqrt{2}$	
apotemă	$a_3 = \frac{l_3 \cdot \sqrt{3}}{6} = r_3$	$a_4 = \frac{l_4}{2} = r_4$	$a_6 = \frac{l_6 \cdot \sqrt{3}}{2} = r_6$
Raza cercului circumscris	$R_3 = \frac{l_3 \cdot \sqrt{3}}{3}$	$R_4 = \frac{l_2 \cdot \sqrt{2}}{2}$	$R_6 = l_6$
perimetrul	$P_3 = 3 \cdot l_3$	$P_4 = 4 \cdot l_4$	$P_6 = 6 \cdot l_6$
aria	$A_3 = \frac{(l_3)^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$	$A = (l_4)^2$	$A_6 = \frac{3(l_6)^2 \cdot \sqrt{3}}{2}$

12)