

Capitolul XIV

GEOME ÎN SPAȚIU (PUNCTE, DREPTE, PLANE)

1) Pozițiile relative a două drepte în spațiu

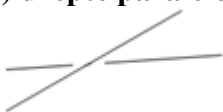
a) **drepte coplanare** - sunt drepte situate în același plan

b) **drepte necoplanare** – drepte care nu sunt situate în același plan

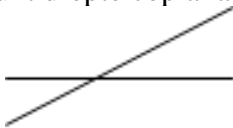
c) **drepte concurente** – intersecția lor este formată dintr-un singur punct

d) **drepte confundate (coincid)** – sunt drepte care se suprapun

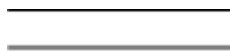
e) **drepte paralele** – sunt drepte coplanare care nu sunt concurente



drepte necoplanare



drepte concurente



drepte paralele

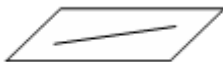
2) Pozițiile relative ale unei drepte față de un plan

a) **conținută în plan** – are toate punctele în plan

b) **concurrentă cu planul** – are un singur punct comun cu planul

c) **paralelă cu planul** – nu are nici un punct comun cu planul

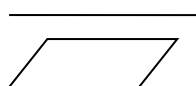
**dreaptă conținută
în plan**



**dreaptă conținută
în plan**



**dreaptă paralelă cu
planul**



3) Pozițiile relative ale două plane

a) **plane ce se întesectează** – intersecția lor este o dreaptă

b) **plane paralele** – nu au nici un punct comun

Obs.: dacă două plane au un punct comun, atunci cele două plane au o dreaptă comună

4) Pozițiile relative a trei plane

a) **plane ce se întesectează într-un singur punct**

b) **plane ce se intersectează după o dreaptă comună**

c) **plane paralele** – nu au nici un punct comun

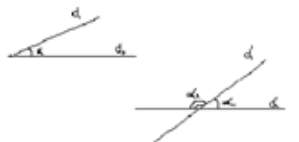
5) Unghiul a două drepte în spațiu – întotdeauna se ia unghiul ascuțit

metoda I. alegem un punct pe una din ele, ducem paralela la cealaltă
metoda II: alegem un punct exterior celor două drepte, ducem paralele la ambele drepte

Obs. I: în spațiu există, ca și în plan:

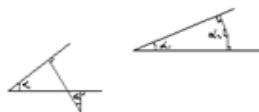
a) unghiuri cu laturi respectiv paralele

Obs: două unghiuri cu laturile respectiv paralele sunt congruente sau suplementare



b) unghiuri cu laturile respectiv perpendiculare

Obs: două unghiuri cu laturile respectiv perpendiculare sunt congruente sau suplementare



6) xioma paralelelor: printr-un punct exterior unei drepte trece o singură dreaptă paralelă cu ea

7) Paralelismul a două drepte

$d_1 \parallel d_2 \Leftrightarrow d_1, d_2$ coplanare și d_1, d_2 nu au puncte comune

Obs: Există drepte fără puncte comune dar neparalele (se numesc necoplanare)

8) paralelismul unei drepte cu un plan

$d_1 \parallel \alpha : \exists d \subset \alpha$ astfel încât $d_1 \parallel d$

Obs.: reciproc nu e adevărat, adică din $d_1 \parallel \alpha \not\Rightarrow d_1 \parallel d, \forall d \subset \alpha$

9) paralelismul a două plane – două plane sunt paralele dacă unul din plane conține două drepte concurente paralele cu cel de-al doilea plan, adică $\alpha \parallel \beta \Leftrightarrow \exists d_1, d_2 \subset \alpha$ astfel încât $d_1 \parallel \beta$ și $d_2 \parallel \beta$

10) perpendicularitatea a 2 drepte

$d_1 \perp d_2 \Leftrightarrow m(\sphericalangle(d_1, d_2)) = 90^\circ$

Obs: Pentru d_1 , în spațiu există o infinitate de drepte perpendiculare în același punct (care alcătuiesc planul perpendicular pe dreaptă în punctual respectiv)

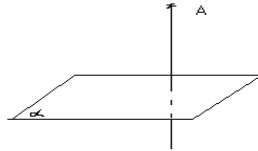
11) perpendicularitatea unei drepte pe un plan

$d_1 \perp \alpha \Leftrightarrow d_1 \perp$ pe două drepte concurente din planul α

Obs: dacă $d_1 \perp \alpha \Rightarrow d_1 \perp$ pe orice dreaptă din α

12) Distanța de la un punct la un plan

– lungimea perpendicularei
din punct pe plan



13) Distanța între două plane paralele –este lungimea perpendicularei comune a celor două plane

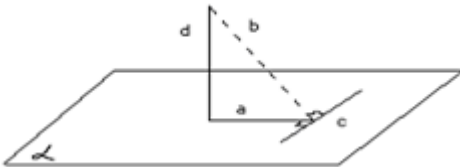
14) Teorema celor trei perpendiculare



$$\left. \begin{array}{l} d \perp \alpha, a \perp c \\ a, c \subset \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow b \perp c$$

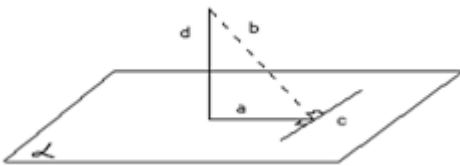
15) Reciprocele teoremei celor trei perpendiculare

Reciproca 1:



$$\left. \begin{array}{l} d \perp a \\ a \perp c \\ b \perp c \\ a, c \subset \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow d \perp \alpha$$

Reciproca 2:

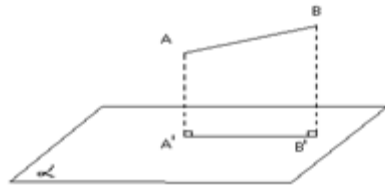


$$\left. \begin{array}{l} d \perp \alpha \\ a, c \subset \alpha \\ b \perp c \end{array} \right\} \Rightarrow a \perp c$$

16) Proiecții ortogonale: ducem perpendiculare din toate punctele figurii pe acel plan.

a) proiecția unui segment – se determină proiectând capetele segmentului pe acel plan

Exp.: dacă $AB \not\parallel \alpha$ proiecția va fi un segment de lungime mai mică



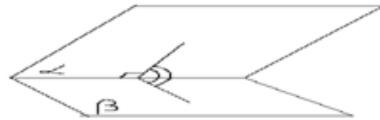
Obs.2: $A'B' = AB \cdot \cos(\angle(AB, \alpha))$

Obs.3: Dacă proiectăm $\triangle ABC$ pe un plan α obținem $\triangle A'B'C'$ și atunci $A_{\triangle ABC} = A_{\triangle A'B'C'} \cdot \cos(\angle(ABC, \alpha))$

17) Unghiul unei drepte cu un plan – unghiul dintre paralela la dreapta și proiecția sa

18) Unghi diedru a două plane neparalele :

- se alege un punct pe dreapta de intesecție a planelor, se duce în fiecare plan câte o semidreaptă, cel puțin una



perpendiculară pe dreapta comună. Unghiul diedru căutat este unghiul format de cele două semidrepte

19)

20)