Capitolul XV
CORPURI ÎN SPAȚIU

1) Prismă dreaptă şi prismă regulată. generalităţi:

a)prismă dreaptă– muchiile laterale sunt perpendiculare pe baze iar cele două baze sunt poligoane

b)prismă regulată- muchiile laterale sunt perpendiculare pe baze iar cele două baze sunt poligoane regulate

c) muchii laterale – laturile feţelor laterale

muchiile bazelor – laturile bazelor

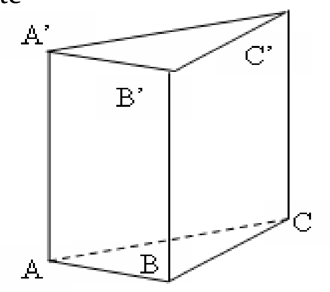
diagonala prismei – segmentul ce uneşte un vârf al bazei de jos cu un vârf al bazei de sus, aceste vârfuri neaparţinând aceleiaşi feţe laterale

2) prismă triunghiulară dreaptă – este o prismă la care muchiile laterale sunt perpendiculare pe bază, iar $\Delta ABC, \Delta A'B'C'$ sunt triunghiuri congreunte

$AA',\ BB',\ CC'$ muchii laterale

AB, BC, AC muchiile bazei

AA' $\perp$ (ABC)



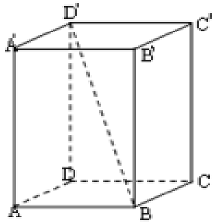
Obs.:Prisma triunghiulară dreaptă nu are diagonale, dat are diagonalele fețelor laterale

Obs.:**prismă triunghiulară regulată –** este o prismă triunghiulară dreaptă la care cele două baze sunt triunghiuri echilaterale.

3) prismă patrulateră dreaptă – muchiile laterale sunt perpendiculare pe baze, iar bazele sunt dreptunghiuri congruente

Obs.:**diagonalele prismei** sunt $AC'; A'C; BD'; B'D$

*Obs.:*Prisma patrulateră dreaptă se numeşte şi **paralelipiped dreptunghic**



Obs.: într-o prismă patrulateră dreaptă diagonalele sunt congruente şi au lungimea $d = \sqrt{L^2 + l^2 + h^2}$

Obs.2:**Prismă patrulateră regulată**-este o prismă patrulateră dreaptă la care cele două baze sunt pătrate.

Obs.3: **Cubul** – este o prismă patrulateră la care toate feţele sunt pătrate, deci toate muchiile (şi ale bazei, şi cele laterale) sunt congruente.

Obs.:într-un cub, diagonalele sunt egale şi au lungimea $d = l\sqrt{3}$

4) Prismă hexagonală dreaptă – muchiile laterale sunt perpendiculare pe baze, iar bazele sunt hexagoane congruente

Obs.2:**Prismă hexagonală regulată** - este o prismă hexagonală dreaptă la care cele două baze sunt hexagoane regulate.

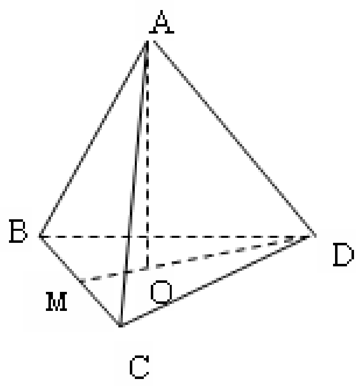
Desenarea ei este identică ca şi la prisma triunghiulară, respectiv cea patrulateră, singura deosebire este că aici bazele sunt hexagoane regulate.

5) Piramidă – are un vârf iar baza este poligon. **Piramidă regulată** – este o piramidă cu baza poligon regulat

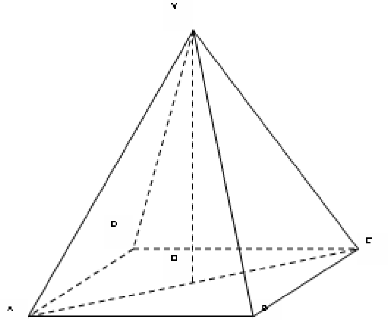
Obs.1: **Tetraedru** - piramidă triunghiulară

Obs.2: **Tetraedru regulat** este o piramidă cu toate feţele triunghiuri echilaterale congruente(deci are toate muchiile, şi ale bazei şi cele laterale congruente).

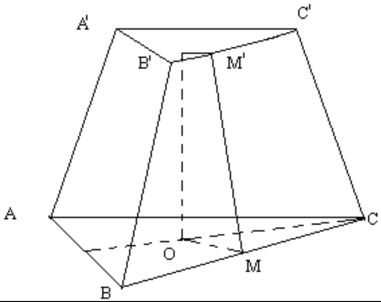
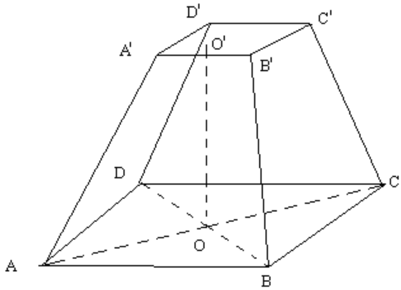
6) piramida triunghiulară regulată

are un vârf, baza este triunghi echilateral, iar fețele laterale sunt triunghiuri isoscele. Înățimea din vârf cade în mijlocul bazei, adică la intersecția liniilor importante. Baza fiind triunghi echilateral, medianele, inălțimile, bisectoarele, mediatoarele coincid	

7) Piramida patrulateră regulată

are un vârf, baza este pătrat, iar fețele laterale sunt triunghiuri isoscele. Înățimea din vârf cade în mijlocul bazei, adică la intersecția diagonalelor.	

8) Trunchi de piramidă – ducem piramida, o secţionăm şi ştergem vârful. Bazele vor fi figuri asemenea.

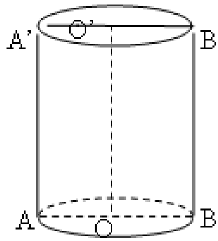
Trunchi de piramidă triunghiulară regulată	**Trunchi de piramidă patrulateră regulată**
	

9) Cilindrul circular drept

este corpul geometric cu două baze cercuri congruente, la care linia ce uneşte centrele celor două cercuri este perpendiculară pe baze.

AO – raze, AA' – generatoare

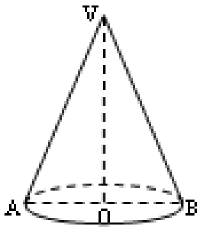
înălţimea este OO'



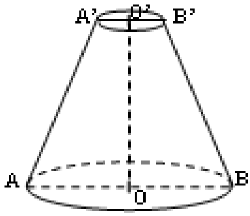
10) Conul circular drept – este corpul geometric cu un vârf şi cu baza cerc, proiecţia înălţimii pe bază fiind centrul cercului

VB – Generatoare

VO – Inaltime



11) Trunchi de con circular drept – este corpul obţinut prin secţionarea unui con cu un plan paralel cu cele două baze. Bazele trunchiului de con circular drept sunt două cercuri asemenea, de raze diferite

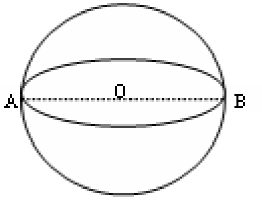


12) Sfera

este mulţimea punctelor din spaţiu egal depărtat de un punct fix, numit centrul sferei

OA, OB sunt raze, iar

AB este diametrul sferei



13) Notaţii uzuale la corpurile geometrice: $a-latura\ cubului$

$L-lungime$ $l-lătime$ $h-înăltimea\ corpului$ $A_l-aria\ laterală$

$A_t-aria\ totală$ $V=volumul$ $A_b-aria\ bazei\ mici$

$A_B-aria\ bazei\ mari$

14) Ariile şi volumele prismelor (au două baze congruente)

a) Aria laterală – suma ariilor feţelor laterale

b) Aria totală – $A_t=A_l+2\cdot A_b$

c) Volumul – $V=A_b\cdot h$

Cubul	**Paralelipipedul dreptunghic**	**Prisma hexagonală regulată**
$A_l=4\cdot a^2$	$A_l=2\cdot(L\cdot h+l\cdot h)$	$A_l=6\cdot l_b\cdot h$
$A_t=6\cdot a^2$	$A_t=2\cdot(L\cdot h+l\cdot h+L\cdot l)$	$A_t=6\cdot l_b\cdot h+2\cdot\frac{3\cdot(l_b)^2\cdot\sqrt{3}}{2}$
$V=a^3$	$V=L\cdot l\cdot h$	$V=\frac{3\cdot(l_b)^2\cdot\sqrt{3}\cdot h}{3}$

15) Ariile şi volumele piramidelor (au o bază şi un vârf)

a) Aria laterală – suma ariilor feţelor laterale

b) Aria totală – $A_t=A_l+A_b$

c) Volumul – $V=\frac{1}{3}\cdot A_b\cdot h$

Piramida triungh. regulată	**Piramida patrulateră regulată**	**Piramida hexagon. regulată**
$A_l=3\cdot\frac{l_b\cdot a_p}{2}$	$A_l=4\cdot\frac{l_b\cdot a_p}{2}=2\cdot l_b\cdot a_p$	$A_l=6\cdot\frac{l_b\cdot a_p}{2}$
$A_l=3\cdot\frac{l_b\cdot a_p}{2}+\frac{l_b^2\sqrt{3}}{4}$	$A_l=2\cdot l_b\cdot a_p+\frac{l_b^2\sqrt{3}}{4}$	$A_t=6\cdot\frac{l_b\cdot a_p}{2}+\frac{3(l_b)^2\sqrt{3}}{2}$
$V=\frac{1}{3}\cdot\frac{l^2\sqrt{3}}{4}\cdot h$	$V=\frac{1}{3}\cdot l^2\cdot h$	$V=\frac{1}{3}\cdot\frac{3\cdot l^2\sqrt{3}}{2}\cdot h$

16) Aria şi volumul tetraedrului regulat

$$A_l = 3\cdot\frac{l^2\sqrt{3}}{4};\quad A_t = l^2\cdot\sqrt{3};\quad V = \frac{1}{3}\cdot\frac{l^2\sqrt{3}}{4}\cdot h$$

17) Ariile şi volumele trunchiurilor de piramidă (corpuri obţinute prin secţionarea piramidelor cu un plan paralel cu baza)

a) Aria laterală – suma ariilor feţelor laterale

b) Aria totală – $A_t = A_l + A_B + A_b$

c) Volumul – $V = \frac{h}{3}\cdot\left(A_B + A_b + \sqrt{A_B\cdot A_b}\right)$

Trunchi de piramidă triunghiulară regulată	**Trunchi de piramidă patrulateră regulată**
$A_l = 3\cdot\frac{(l_b + l_B)\cdot a_p}{2}$	$A_l = 4\cdot\frac{(l_b + l_B)\cdot a_p}{2}$
$A_t = 3\cdot\frac{(l_b + l_B)\cdot a_p}{2} + \frac{l_b^2\sqrt{3}}{4} + \frac{l_B^2\sqrt{3}}{4}$	$A_t = 4\cdot\frac{(l_b + l_B)\cdot a_p}{2} + l_B^2 + l_b^2$
$V = \frac{h}{3}\cdot\left(\frac{l_B^2\sqrt{3}}{4} + \frac{l_b^2\sqrt{3}}{4} + \frac{l_B\cdot l_b\sqrt{3}}{4}\right)$	$V = \frac{h}{3}\cdot\left(l_B^2 + l_b^2 + l_B\cdot l_b\right)$

Obs.: se deduc ariile, volumul trnchiului de piramidă hexagonală regulată

18) Aria şi volumul cilindrului (corp rotund ce are 2 baze cercuri identice)

a) Aria laterală – aria feţei obţinute prin desfăşurare b) Aria totală – $A_t = A_l + 2\cdot A_b$ c) Volumul – $V = A_b\cdot h$	$A_l = 2\cdot\pi\cdot R\cdot G$ $A_t = 2\cdot\pi\cdot R\cdot(R+G)$ $V = \pi\cdot R^2\cdot h$

19) Aria şi volumul conului (corp rotund cu 1 bază cerc şi un vârf)

a) Aria laterală – aria feţei obţinute prin desfăşurare b) Aria totală – $A_t = A_l + A_b$	$A_l = \pi\cdot R\cdot G$ $A_l = \pi\cdot R\cdot(R+G)$

c) Volumul – $V = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot h$	$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot R^2 \cdot h$

20) Aria şi volumul trunchiului de con

a) Aria laterală – aria feţei obţinute prin desfăşurare b) Aria totală – $A_t = A_l + A_b$ c) Volumul – $V = \frac{h}{3} \cdot \left(A_B + A_b + \sqrt{A_B \cdot A_b}\right)$	$A_l = \pi \cdot G \cdot (R + r)$ $A_l = \pi \cdot G \cdot (R + r) + \pi \left(R^2 + r^2\right)$ $V = \frac{\pi \cdot h}{3} \cdot \left(R^2 + r^2 + R \cdot r\right)$

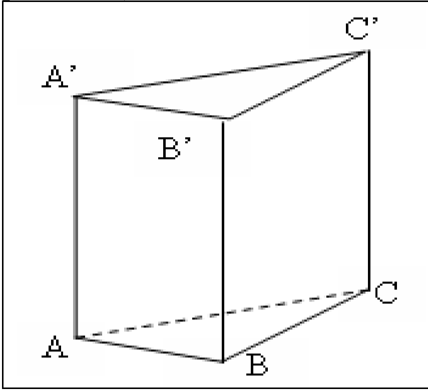
21) Aria şi volumul sferei

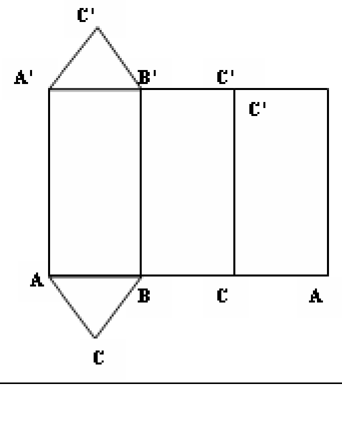
a) Aria $A = 4 \cdot \pi \cdot R^2$

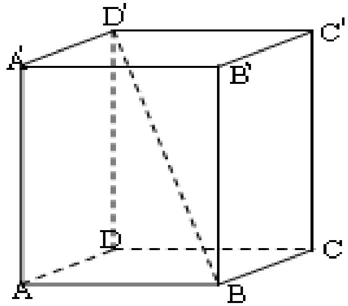
b) Volumul $V = \frac{4 \cdot \pi \cdot R^3}{3}$

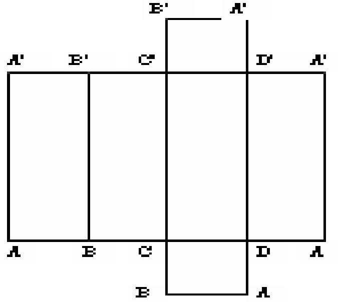
22) Desfăşurări : - desfăşurarea unui anumit corp înseamnă „tăierea” acelui corp şi întinderea componentelor acelui corp pe acelaşi plan.

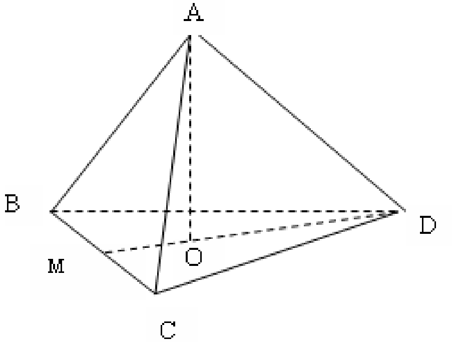
O să prezint cele mai importante desfăşurări (cele care apar în probleme).

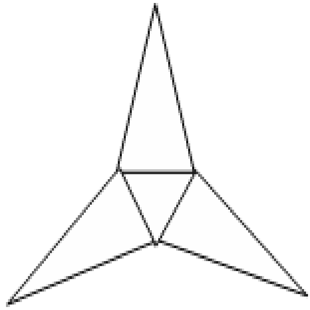


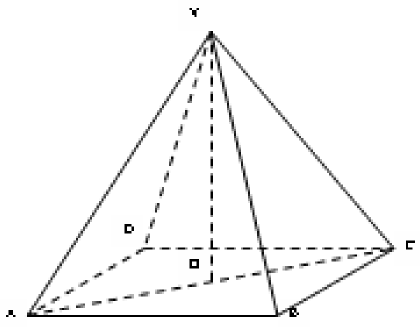


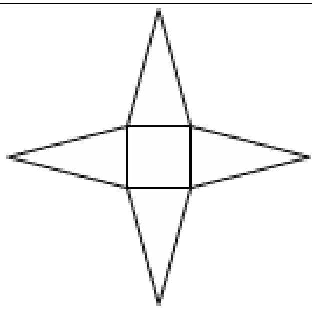

D'
C'
A'
B'
D
C
A
B

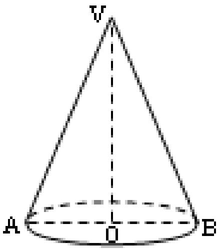

B' A'
A' B' C' D' A'
A B C D A
B A

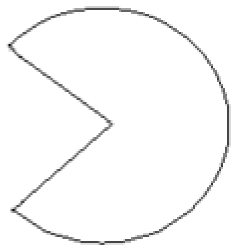

A
B
D
M
O
C








V
A
0
B



23) Secţiuni paralele cu baza :

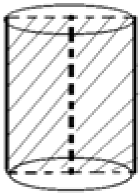
la prisma, cilindru = congruente cu baza

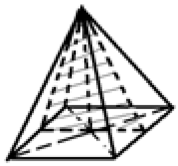
-la piramida, con , trunchi = asemenea cu baza

Obs: $F_1 \sim F_2 \Rightarrow \frac{P_{F_1}}{P_{F_2}} = \frac{l_1}{l_2}, \frac{A_{F_1}}{A_{F_2}} = \left(\frac{l_1}{l_2}\right)^2, \frac{V_{F_1}}{V_{F_2}} = \left(\frac{l_1}{l_2}\right)^3$

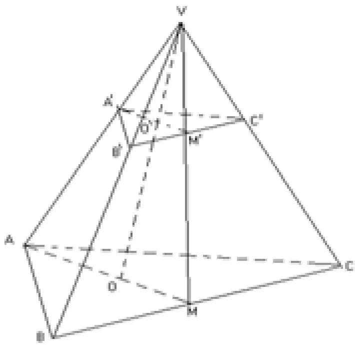
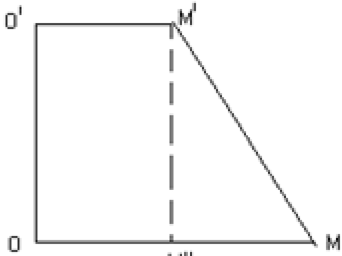
24) Sectiuni axiale :

-sectiunile ce conţin înălţimea figurii şi sunt perpendiculare pe bază





25) Determinarea elementelor intr-un trunchi de piramidă

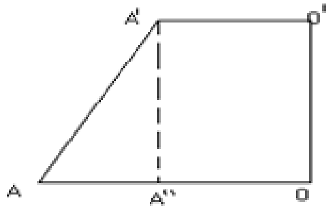
Triunghiulară regulată şi într-o piramidă triunghiulară regulată ştim $m_B, m_b, h_{trunchi}$ - se cere : a) $a_{trunchi}$ b) $m_{l.trunchi}$ c) $h_{piramida}$ d) $m_{l.piramida}$ e) $a_{piramidei}$	
Găsim apotema trunchiului Decupăm trapezul dreptunghic $OMM'O'$ şi obţinem: E1) $M'M'' \parallel OO' => M'M''$ (1) E2) OM apotemă, deci din triunghi echilateral => $OM = \frac{1}{3} \cdot \frac{l\sqrt{3}}{2} = \frac{m_B\sqrt{3}}{6} => OM$	

$$O'M' = \frac{m_b\sqrt{3}}{6} \Rightarrow O'M'M''M = OM - O'M' => M''M \quad (2)$$

Din (1) si (2) Pitagora => $M'M = ...$

Găsim muchia laterală a trunchiului

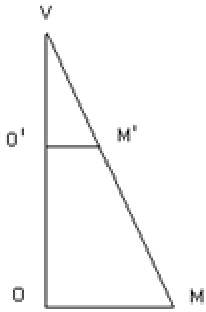
E1) stim $A'A'' \| O'O => A'A''$



E2) $AO = \frac{2}{3}\cdot\frac{m_B\sqrt{3}}{2} = \frac{m_B\sqrt{3}}{3} = AO$

$A'O' = \frac{m_b\sqrt{3}}{3} \Rightarrow A'O' => AA'' = AO - A''O => AA''$, iar cu Pitagora => $AA' = \ldots$

Găsim înălţimea, apotema şi muchia laterală a piramidei,



$$OM = \frac{m_B\sqrt{3}}{6}, O'M' = \frac{m_b\sqrt{3}}{6}$$

Δ VO'M' ~ Δ VOM $\Rightarrow$

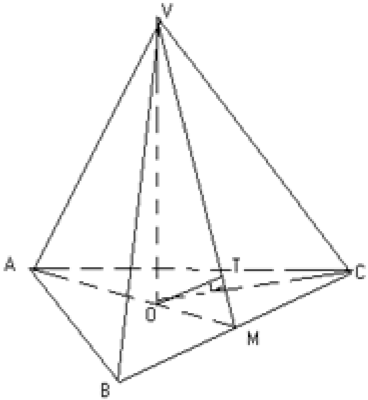
$$\frac{VO'}{VO} = \frac{O'M'}{OM} = \frac{VM'}{VM}$$

$$\frac{VO'}{OO' + VO'} = \frac{O'M'}{OM} = \frac{VM'}{VM' + MM'}$$

ştim OO'=> VO'=….. => VO=….., VM'=…. => VM=….

26) determinarea distanţei de la centrul bazei la o faţă laterală

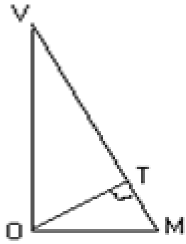
Ştim muchiile bazei şi înălţimea piramidei



E1) se arată că distanţa de la centrul bazei la o faţă laterală este perpendiculara din centrul bazei pe apotema piramidei

E2) în ΔABC echilateral, $AM = \frac{l\sqrt{3}}{2}$ fiind înălţime, iar $OM = \frac{1}{3} \cdot \frac{l\sqrt{3}}{2} = \frac{l\sqrt{3}}{6}$

E2) în ΔVOM dreptunghic, folosind teorema lui Pitagora determinăm apotema VM



E4)decupăm figura şi obţinem triunghiul dreptunghic ΔVOM, şi folosim formula înălţimii din unghiul drept, $OT = \frac{OV \cdot OM}{VM}$

27) Formule adăugte de voi