Capitolul II
DIVIZIBILITATE

1) Divizibilitate pe numere întregi

a **este divizibil** cu b se notează $a \vdots b \Leftrightarrow$ restul lui $a : b$ este 0

b **divide** pe a se notează $b / a \Leftrightarrow$ restul lui $a : b$ este 0

Obs.1: $a \vdots b \Leftrightarrow b / a$

Obs.:2: $0 \vdots a, \forall a \in \mathbb{Z}$, $a \vdots a, \forall a \in \mathbb{Z}$

$a \vdots 1, \forall a \in \mathbb{Z}$, $a \vdots (-1), \forall a \in \mathbb{Z}$,

2) Divizor, multiplu

a) divizor al lui n : număr la care n se împarte exact

b) multiplu al lui n : număr care se împarte exact la n

Exp: Mulţimea divizorilor lui 6 este $D_6 = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}$

Mulţimea multiplilor lui 6 este $M_6 = \{0; \pm 6; \pm 12; \ldots\}$

Obs.: 0 este multiplu al oricărui număr întreg

3) Divizori improprii – “nu divid, nu sparg numărul” sunt 1 şi numărul însuşi

Divizori proprii – “divid, sparg numărul” sunt ceilalţi divizori

Obs.1: orice număr natural are **divizori proprii şi divizori improprii** (aceşti divizori se consideră doar naturali).

Exp: $n = 6 \Rightarrow$ divizori improprii: 1 şi 6, divizori proprii sunt 2 şi 3.

4) Criterii de divizibilitate – reguli care precizează când a este divizibil cu b, fără a face împărţirea lui a la b :

1) n este divizibil cu 2 $\Leftrightarrow$ n are ultima cifră pară

2) n este divizibil cu 3 $\Leftrightarrow$ n are suma cifrelor divizibilă cu 3

3) n este divizibil cu 4 $\Leftrightarrow$ n are numărul format cu ultimele 2 cifre divizibil cu 4

4) n este divizibil cu 5 $\Leftrightarrow$ n are ultima cifră 0 sau 5

5) n este divizibil cu 9 $\Leftrightarrow$ n are suma cifrelor divizibilă cu 9

6) n este divizibil cu 10 $\Leftrightarrow$ n are ultima cifră 0

7) n este divizibil cu 25 $\Leftrightarrow$ n are numărul format cu ultimele 2 cifre divizibil cu 25

8) n este divizibil cu 100 $\Leftrightarrow$ n are ultimele două cifre 0

9) n este divizibil cu 1000 $\Leftrightarrow$ n are ultimele trei cifre 0

5) Numere pare, numere impare

a **este număr par** $\Leftrightarrow a \vdots 2$,adică a are ultima cifră pară***, iar*** b **este impar** $\Leftrightarrow b \not\vdots 2$ **,** adică b are ultima cifră impară

Obs.1: mulţimea numerelor pare se notează $2\mathbb{N}$, iar un număr par se notează $2n$

Obs.2: mulţimea numerelor impare se notează $2\mathbb{N}+1$, iar un număr impar se notează $2n+1$

6) Numere prime: au exact doi divizori distincţi naturali

numere compuse: au mai mult de doi divizori distincţi naturali

Exp.: 2 este număr prim, iar 4 este compus

Obs.1: 1 nu e prim, nu e compus, iar 0 este compus

Obs.2: singurul număr prim si par este 2

7) Descompunere în factori primi:

Etapa 1) dacă ultima cifră este 10^n se scrie $2^n \cdot 5^n$

Etapa 2) se încearcă, pe rând, celelalte numere prime

Etapa 3) se scrie apoi numărul ca produs de factori primi, factori primi eventual ridicaţi la putere

Exp.:descompuneţi în produs de factori primi numărul $n=7500$

7500	$2^2 \cdot 5^2$
75	3
25	5^2
1	

Deci $n=2^2 \cdot 3 \cdot 5^4$

8) Aflarea celui mai mare divizor comun (c.m.m.d.c.) şi cel mai mic multiplu comun(c.m.m.m.c)

Aflarea c.m.m.d.c.

metoda 1: se scriu divizorii tuturor numerelor, se alege cel mai mare divizor comun metoda 2: se descompun numerele în factori primi, iar **c.m.m.d.c**. este egal cu produsul factorilor comuni la puterea cea mai mică, îl notăm (a,b)

Aflarea c.m.m.m.c.
metoda 1: se scriu multiplii tuturor numerelor până obținem un multiplu comun, acela este cel mai mic multiplu comun
metoda 2: se descompun numerele în factori primi, iar **c.m.m.m.c**. este egal cu produsul factorilor comuni șinecomuni la puterea cea mai mare, îl notăm $[a,b]$

Obs.: $(a,b)\cdot[a,b]=a\cdot b$

9) Numere prime între ele: au cel mai mare divizor comun pe 1, se notează $(a,b)=1$

Obs.: două numere pot fi prime între ele fără a fi neapărat numere prime.
Exp.: $a=9$ şi $b=100$ sunt numere prime între ele, însă ele nu sunt numere prime

10) Proprietăţi ale relaţiei de divizibilitate

(1) $\left.\begin{matrix} a \mid b \\ b \mid c \end{matrix}\right\} \Rightarrow a \mid c, \forall a,b,c \in \mathbb{Z}$ *(2)* $\left.\begin{matrix} a \mid b \\ a \mid c \end{matrix}\right\} \Rightarrow a \mid b+c$ şi $a \mid b-c, \forall a,b,c \in \mathbb{Z}$

(3) $a \mid b \Rightarrow a \mid n\cdot b,\ \forall n \in \mathbb{Z}$ *(4)* $a \mid a, \forall a \in \mathbb{Z}$

(6) $1 \mid a, \forall a \in \mathbb{Z}$ (5) $a \mid 0, \forall a \in \mathbb{Z}^*$

(7)Dacă $a,b \in \mathbb{Z}$ din $a \mid b$ şi $b \mid a \Rightarrow a=\pm b$

(8)Dacă $a,b \in \mathbb{N}$ din $a \mid b$ şi $b \mid a \Rightarrow a=b$

(9) $a \mid bc$ şi $(\text{a,b})=1 \Rightarrow a \mid c$

Exp.: $n=?,\ n \in \mathbb{Z}$ astfel încât $\dfrac{3n+1}{n+2} \in \mathbb{Z}$

Soluţie: $n+2 \mid 3n+1$.

Dar $n+2 \mid n+2 \Rightarrow n+2 \mid 3(n+2) \Rightarrow n+2 \mid 3n+6$. Avem aşadar

$$\left.\begin{array}{l} n+2 \mid 3n+1 \\ n+2 \mid 3n+6 \end{array}\right\} \Rightarrow n+2 \mid 3n+1-(3n+6) \Rightarrow (n+2) \mid -5$$

$$\Rightarrow n+2 \in D_{-5} = \{-5;-1;1;5\} \Rightarrow n \in \{-7;-3;-1;3\}$$

11) *Algoritm de a vedea dacă un număr este prim sau compus

E1) dacă numărul este mic, îl descompunem în factori primi să vedem câţi divizori are acel număr

E2)dacă numărul este mai mare, îl împărţim pe rând la toate numerele prime începând cu 2

E3) dacă găsim un număr la care se împarte, atunci numărul nostru nu este număr prim

E4) dacă nu găsim niciun număr la care se împarte, continuăm până obţinem un cât mai mic sau egal cu împărţitorul, iar în acest caz numărul iniţial este prim