Capitolul III
MULȚIMEA NUMERELOR RAȚIONALE

1) Mulţimea numerelor raţionale se notează cu $\mathbb{Q}$ şi

$$\mathbb{Q}=\left\{\frac{a}{b}\middle| a,b\in\mathbb{Z}, b\neq 0\right\}$$

Obs.1: prin transformarea fracțiilor ordinare de forma $\frac{a}{b}$ cu $a,b\in\mathbb{Z}$, $b\neq 0$ în fracții ordinare putem obține fracții zecimale cu număr finit de zecimale sau fracții periodice, de aceea putem afirma că mulțimea numerelor raționale este formată din

$\{\text{fracţii zecimale cu număr finit de zecimale}\}\cup\{\text{fracţii periodice}\}$

Obs.2: Numerele raţionale conţin **fracţii ordinare (apare linie de fracţie)** şi **fracţii zecimale** (nu apare linie de fracţie, apare însă virgula)

2) Fracţii ordinare - apare linia de fracţie

a) au forma $\frac{a}{b}, a,b\in\mathbb{Z}, b\neq 0$, unde *a* se numeşte numărător, iar *b* numitor

b) fracţii subunitare: $\frac{a}{b}\in(0,1)$,

Exp.: $\frac{2}{3}$ fracţie subunitară

c) fracţii echiunitare: $\frac{a}{b}=1$ sau $\frac{a}{b}$ cu $a=b$

Exp.: $\frac{3}{3}$ fracţie echiunitară

d) fracţii supraunitare: $\frac{a}{b}>1$

Exp.: $\frac{5}{4}$ fracţie supraunitară

e) fracţii egale (echivalente): $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow a\cdot d=b\cdot c$

Exp.: $\frac{5}{4}=\frac{10}{8}$

3) Opusa, inversa unei fracții

a) opusa fracției $\frac{a}{b}$ este $-\frac{a}{b}$

b) inversa fracției $\frac{a}{b}$ este $\frac{b}{a}$

4) Introducerea și scoaterea întregilor din fracție

a) introducerea întregilor în fracție – se folosește $a\frac{b}{c}=a+\frac{b}{c}=\frac{a\cdot c+b}{c}$

b) scoaterea întregilor în fracție – se cere să scoatem întregii din $\frac{a}{b}$

- împărțim $a:b=c$ rest $r \Rightarrow \frac{a}{b}=c+\frac{r}{b}$

5) Amplificarea fracțiilor - înseamnă îmulțirea numărătorului și a numitorului cu același număr

Exp.: Amplificați cu 2 fracția $\frac{^{2)}5}{3}=\frac{5\cdot 2}{3\cdot 2}=\frac{10}{6}$

6) Simplificarea fracțiilor - înseamnă împărțirea numărătorului și a numitorului cu același număr

Exp.: Amplificați cu 2 fracția $\frac{10^{(2}}{6}=\frac{10:2}{6:2}=\frac{5}{3}$

7) Fracţii ireductibile: $\frac{a}{b}$ cu $(a,b)=1$, adică cel mai mare divizor comun al lui a şi b este 1, sunt fracţii care nu se mai pot simplifica

8) Adunarea, scăderea fracțiilor – se aduc fracțiile la același numitor, apoi se copiază numitoirul comun și se adun, respectiv se scad numărătorii

Exp1.: $\frac{^{5)}2}{3}+\frac{^{3)}7}{5}=\frac{2\cdot5+7\cdot3}{3\cdot5}=\frac{31}{15}$

Exp2.: $\frac{^{5)}2}{3}-\frac{^{3)}7}{5}=\frac{2\cdot5-7\cdot3}{3\cdot5}=-\frac{11}{15}$

9) Înmulțirea fracțiilor – se înmulțesc numărătorii între ei, respectiv numitorii între ei.

Exp1.: $\frac{2}{3}\cdot\frac{7}{5}=\frac{2\cdot7}{3\cdot5}=\frac{14}{15}$

Obs.: dacă se poate, se simplifică în diagonală

Exp1.: $\frac{\cancel{2}}{3}\cdot\frac{7}{\cancel{8}_4}=\frac{7}{3\cdot4}=\frac{7}{12}$

10) Împărțirea fracțiilor – se înmulțește prima fracție cu inversa celei de-a doua.

Exp1.: $\frac{2}{3}:\frac{7}{5}=\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{7}=\frac{2\cdot5}{3\cdot7}=\frac{10}{21}$

Obs.: dacă se poate, la înmulțire, se simplifică în diagonală

Exp1.: $\frac{2}{3}:\frac{8}{7}=\frac{\cancel{2}}{3}\cdot\frac{7}{\cancel{8}_4}=\frac{7}{3\cdot4}=\frac{7}{12}$

11) Puterile unei fracții – se ridică și numărătorul și numitorul la acea putere

Exp1.: $\left(\frac{2}{3}\right)^4=\frac{2^4}{3^4}=\frac{2\cdot2\cdot2\cdot2}{3\cdot3\cdot3\cdot3}=\frac{16}{81}$

Obs.: sunt valabile toate proprietățile de la puteri descrise la numere întregi, adică

$\left(\frac{a}{b}\right)^m\cdot\left(\frac{a}{b}\right)^n=\left(\frac{a}{b}\right)^{m+n}$ $\left(\frac{a}{b}\right)^m:\left(\frac{a}{b}\right)^n=\left(\frac{a}{b}\right)^{m-n}$

$$\left(\left(\frac{a}{b}\right)^m\right)^n=\left(\frac{a}{b}\right)^{m\cdot n}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m=\frac{a^m}{b^m}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^1=\frac{a}{b}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-1}=\frac{b}{a}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n}=\frac{1}{\left(\frac{b}{a}\right)^n}=\frac{1}{\frac{b^n}{a^n}}=\frac{a^n}{b^n}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^0=1,\forall\frac{a}{b}\neq 0$$

$$\left(\left(\frac{a}{b}\right)\cdot\left(\frac{c}{d}\right)\right)^n=\left(\frac{a}{b}\right)^n\cdot\left(\frac{c}{d}\right)^n$$

$0^n=0,\forall n\neq 0$

0^0 nu există

12) Fracții sau procente dintr-un număr întreg sau dintr-o fracție

a) $\frac{a}{b}$ din N înseamnă $\frac{a}{b}\cdot N$ iar $\frac{a}{b}$ din $\frac{c}{d}$ înseamnă $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}$

b) $p\%$ din N înseamnă $\frac{p}{100}\cdot N$ iar $p\%$ din $\frac{c}{d}$ înseamnă $\frac{p}{100}\cdot\frac{c}{d}$

13) Fracții etajate – se împarte numărătorul fracției la numitor, adică se înmulțește numărătorul cu inversul numitorului

14) Compararea fracțiilor – se aduc fracțiile la același numitor și se compară numărătorii.

- dacă au același numitor și cele două fracții sunt pozitive, este mai mică fracția cu numărătorul mai mic
- dacă au același numitor și una este negativă iar cealaltă pozitivă, este mai mică fracția negativă
- dacă au același numitor și cele două fracții sunt negative, comparăm modulul lor (adică le comparăm fără a ține cont de semn), apoi prin înmulțire cu -1 ordinea se inversează

Obs.: dacă cele două fracții au același numărător și sunt pozitive, este mai mică fracția cu numărătorul mai mare, deoarece împărțind o cantitate la mai multe persoane, valoarea obținută este mai mică

15) Fracţii zecimale – sunt de mai multe tipuri:

fracţii zecimale finite – au un număr finit de zecimale, exp. $a = 4{,}1$

sunt fracţii zecimale periodice – au un număr infinit de zecimale care se repetă.

Exp. $a = 4{,}121212.....$ sau $b = 4{,}1232323.....$

Aceste fracţii periodice se reîmpart în:

a) fracţii periodice simple – cifrele încep să se repete imediat după virgulă, exp.: $a = 4{,}121212.....$

b) fracţii periodice mixte – apar şi alte cifre între virgulă şi cifrele care încep să se repete după virgulă, exp.: $b = 4{,}1232323.....$

Obs.: la orice fracție zecimală, se poate completa după virgulă cu oricâte de multe zeouri dorim, valoarea fracției va rămâne aceeași *Exp.* $4{,}12 = 4{,}120 = 4{,}1200 = ...$

16) Adunarea și scăderea fracțiilor zecimale cu un număr finit de zecimale – se scriu fracțiile zecimale una sub alta, virgulă sub virgulă și se adună, se scad corespunzător, iara dacă numărul de zecimale la una din fracții este mai mic decât la cealaltă, se completează cu zerouri.

17) Înmulțirea fracțiilor zecimale cu un număr finit de zecimale – se înmulțesc fracțiile zecimale fără a ține cont de virgulă, iar la rezultat trebuie să avem atâtea zecimale câte zecimale au în total cele două fracții zecimale.

Obs.: dacă jnu avem suficiente zecimale la rezultat, se completează rezultatul cu zerouri puse în fața numărului.

18) Împărțirea fracțiilor zecimale cu un număr finit de zecimale

a) dacă împărțitorul (cel la care împart) nu are zecimale, se împart ca și numere naturale, doar că atunci când întâlnim virgula la deîmpărțit, o vom pune și la împărțitor

b) dacă împărțitorul (cel la care împart) are zecimale, mutăm virgula atât peste împărțitor cât și pentru deîmpărțit cu un număr de zecimale egal cu numărul de zecimale al împărțitorului, apoi se împart ca și numere naturale, doar că atunci când întâlnim virgula la deîmpărțit, o vom pune și la împărțitor

19) Ridicarea la putere a fracțiilor zecimale – se realizează prin înmulțire repetată

Exp.: $(2,1)^3 = 2,1 \cdot 2,1 \cdot 2,1 = 9,261$

Obs.: sunt valabile toate proprietățile de la puteri descrise la numere întregi, adică

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ $a^m : a^n = a^{m-n}$

$\left(a^m\right)^n = a^{m \cdot n}$ $a^1 = a$

$a^0 = 1, \forall a \neq 0$ $0^n = 0, \forall n \neq 0$

$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$ $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ nu există 0^0

20) Transformarea fracţiilor ordinare în zecimale – se realizează prin împărţire până obţinem restul 0, iar dacă nu obționem restul 0, atunci la cât, zecimalele se repetă și atunci avem fracţii periodice.

Exp.1.: $\frac{21}{10} = 2,1$;

Exp.2: $\frac{19}{9} = 2,(1)$;

Exp.3: $\frac{190}{90} = 2,1(1)$

21) Transformarea fracţiilor zecimale în ordinare

a) Dacă avem fracție zecimală simplă, se scrie la numărător numărul fără virgulă, iar la numitor 1 urmat de atâtea zerouri câte cifre sunt după virgulă

Exp 1: $32,17=\frac{3217}{100}$

b) Dacă avem fracție zecimală simplă periodică, se scrie la numărător numărul fără virgulă din care se scade partea până la perioadă, iar la numitor atâtea cifre de 9 câte cifre are perioada urmat de atâtea cifre de 0 câte cifre sunt între virgulă și perioadă

Exp1: $2,(13)=\frac{213-2}{99}$

Exp2: $2,1(34)=\frac{2134-21}{990}$

22) Compararea fracțiilor zecimale pozitive - se compară partea lor întreagă, apoi în ordine zecimalele corespunzătoare

23) Ordinea efectuării operaţiilor

Operaţiile sunt de 3 tipuri:

a) de ordin 1: adunarea şi scăderea

b) de ordin II: înmulţirea şi împărţirea

c) de ordin III: ridicările la putere

E1)dacă nu există paranteze şi operaţiile sunt de acelaşi ordin, se efectuează în ordinea în care apar

E2) dacă nu există paranteze şi operaţiile nu sunt de acelaşi ordin, se efectuează întâi ridicările la putere, apoi înmulţirile şi împărţirile şi abia apoi adunările şi scăderile

E3) dacă există paranteze se efectuează întâi operaţiile din parantezele rotunde, apoi din paranteze drepte şi abia apoi la final din acolade, în fiecare paranteză respectându-se regulile de mai sus

24)