

Capitolul V

RAPOARTE ȘI PROPORȚII

1) **Raport** $\frac{a}{b}$ cu a și b de același tip și măsurate cu aceeași unitate

de măsură.

Obs.: Raportul întotdeauna dă un număr

Exp: raportul 2 cm și 3 m este $\frac{2\text{cm}}{300\text{cm}} = \frac{2}{300} = \frac{1}{150}$

2) **Proporție** - egalitatea a mai multor rapoarte

Exp.: $\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{3}{9}$

3) **Mezi, extremi ai unei proporții:**-provin din citirea proporției, a supra b este egal cu c supra d prima și ultima literă sunt extremi, iar cei din mijloc sunt mezi. Deci, având proporția

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow$ **extremi** sunt a, d iar **mezi** sunt b, c

4) **Proprietatea fundamentală a proporției:**

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$$

5) **Proporții derivate**

a) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{ma + sc}{mb + sd}, \forall m, s \in \mathbb{R}$

b) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{ma + sb}{tb} = \frac{mc + sd}{td} \forall m, s, t \in \mathbb{R}$

Demonstrăm aceste proprietăți deoarece ideea din demonstrație se folosește foarte des în aplicații.

a) Notăm $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k \Rightarrow a = kb, c = kd$. Vom avea așadar

$$\frac{ma + sc}{mb + sd} = \frac{mkb + skd}{mb + sd} = \frac{k(\cancel{mb} + \cancel{sd})}{\cancel{mb} + \cancel{sd}} = k. \text{ Cum însă } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$$

obținem proprietatea din enunț.

$$b) \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k \Rightarrow a = kb, c = kd \Rightarrow \frac{ma + sb}{tb} = \frac{mkb + sb}{tb} = \frac{mk + s}{t}$$

$$\frac{mc + sd}{td} = \frac{mkd + sd}{td} = \frac{mk + s}{t} \text{ și se obține egalitatea cerută.}$$

$$\text{Exp: } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = 9, \text{ se cere } 3b - 7d \text{ dacă } 3a - 7c = 11$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{3a - 7c}{3b - 7d} = \frac{11}{3b - 7d} = 9 \Rightarrow 3b - 7d = \frac{11}{9}$$

6) Aflarea termenului necunoscut din proporții

$$x = \frac{\text{produsul termenilor diagonali ce nu conțin } x}{\text{termenul diagonal lui } x}$$

$$\text{Exp: } \frac{x}{2} = \frac{7}{5} \Rightarrow x = \frac{14}{5}$$

$$\text{Exp: } \frac{2}{x} = \frac{7}{5} \Rightarrow x = \frac{10}{7}$$

$$\text{Exp: } \frac{x}{2} = 7 \Rightarrow x = \frac{14}{1}$$

$$\text{Exp: } \frac{2}{x} = 7 \Rightarrow x = \frac{2 \cdot 1}{7} = \frac{2}{7}$$

7) Proporționalitate directă, proporționalitate inversă:

$$a \text{ și } b \text{ sunt direct proporționale cu } c \text{ și } d \Leftrightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$

$$a \text{ și } b \text{ sunt invers proporționale cu } c \text{ și } d \Leftrightarrow a \text{ și } b \text{ sunt direct}$$

$$\text{proporționale cu inversele lui } c \text{ și } d \Leftrightarrow \frac{a}{\frac{1}{c}} = \frac{b}{\frac{1}{d}} \Leftrightarrow ac = bd$$

Exp.: să se afle 2 numere direct proporționale cu 2 și 3 dacă suma lor este 10.

Notăm cele 2 numere cu a și b și avem :

$$\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = k \Rightarrow a = 2k, b = 3k . \text{ Deoarece suma lor este } 10 \text{ vom obține}$$

$$a + b = 10 \Rightarrow 2k + 3k = 10 \Rightarrow k = 2 \Rightarrow a = 2k = 4, b = 3k = 6$$

8) Regula de trei simplă pentru mărimi direct proporționale - atunci când se măresc termenii din stânga, se măresc și cei din dreapta

Exp: $\wedge 2 m \text{ stofa} \dots \dots \dots 24 \text{ lei} \wedge$

$$8 m \text{ stofa} \dots \dots \dots x \text{ leirezultă } x = \frac{8 \cdot 24}{2}$$

9) Regula de trei simplă pentru mărimi invers proporționale: atunci când se măresc termenii din stânga, cei din dreapta scad

Exp: 2 tractoare ară un ogor..... 8 zile

$$\wedge 6 \text{ tractoare ară un ogor} \dots \dots \dots x \text{ zile} \vee \text{rezultă } x = \frac{2 \cdot 8}{6} = \frac{16}{6}$$

10) Calcularea unui procent dintr-un număr $\frac{P}{100}$ din $x = \frac{P}{100} \cdot x$

Exp. Un calculator se ieftinește cu 10%. Dacă el a costat 2000RON, aflați cu cât s-a ieftinit acest calculator.

$$10\% \text{ din } 2000\text{RON} = \frac{10}{100} \cdot 2000 = 200\text{RON}$$

11) Aflarea unui număr dacă știm un anumit procent din acel număr - știm că $p\%$ din x este a , se cere $x = ?$

Exp.: Mama îmi cumpără un calculator, cu condiția ca 10% din prețul său să îl achit eu. Știind că eu trebuie să dau 15RON, aflați prețul calculatorului.

Notăm prețul calculatorului cu x și obținem

$$10\% \text{ din } x = 15 \text{ RON} \Leftrightarrow \frac{10}{100} \cdot x = 15 \Leftrightarrow x = \frac{15 \cdot 100}{10} = 150$$

12) Aflarea raportului procentual – înseamnă scrierea unui număr ca un număr rațional cu numitorul 100.

Exp. : Să se scrie ca raport procentual numărul.

$$\text{Soluție : } \frac{3}{5} = \frac{60}{100} \Rightarrow 60\%$$

13) Rezolvarea unor probleme în care apar procente.

Exp. : Cât la sută elevi au făcut tema dacă 9 elevi din 18 au făcut tema ?

$$\frac{x}{100} \cdot 18 = 9 \Rightarrow x = \frac{100 \cdot 9}{18} = 50 \Rightarrow 50\% \text{ din elevi}$$

14) Probabilități $P(A) = \frac{\text{numărul cazurilor favorabile}}{\text{numărul cazurilor posibile}}$

Exp. : Care este probabilitatea ca aruncând un zar să obținem o cifră impară?

Deoarece sunt 3 cifre impare de la 1 la 6 $\Rightarrow P = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

15)**16)****17)**