Capitolul VI
NUMERE REALE

1) Rădăcina pătrată a unui număr natural pătrat perfect

$\sqrt{x} = y \Leftrightarrow x = y^2$

Exp.: $\sqrt{9} = 3$ căci $9 = 3^2$

2) Algoritmul de extragere a rădăcinii pătrate dintr-un număr real (extragerea radicalului)

E1)se împarte numărul în grupe de 2 cifre, începând de la virgulă către partea stângă şi apoi înspre dreapta. Dacă partea din dreapta nu are număr par de cifre, se completează cu o cifră de 0.

E2)se caută **cea mai mare cifră** care ridicată la pătrat să dea exact primul grup de cifre sau mai mic decât el *(în cazul nostru, cifra căutată ridicată la pătrat trebuie să dea 2 sau mai mică decât 2. Evident,* $1^2 = 1 < 2$, $2^2 = 4 > 1$*fals, aşadar prima cifră a rezultatului este 1)*

E3)se scade din primul grup pătratul cifrei obţinute, se coboară apoi grupul de cifre care urmează*(deci* $2 - 1^2 = 2 - 1 = 1$*, se coboară apoi grupul de 2 cifre şi obţinem* 131*)*

E4) în dreapta se dublează rezultatul obţinut şi ar trebui completat cu **cea mai mare cifră** astfel încât înmulţit cu aceeaşi cifră să dea numărul obţinut prin coborâre în partea stângă sau un număr mai mic decât el.(*1 dublat dă 2, apoi se caută cea mai mare cifră x astfel încât* $\overline{2x} \cdot x$ *să dea 131 sau mai mic decât 131. Astfel,* $25 \cdot 5 = 125 < 131$ *,posibil cifra căutată este 5, căutâm, poate este alta mai mare care verifică.* $26 \cdot 6 = 156 > 131$*, fals, aşadar 5 este cifra căutată*)

E5) se completează rezultatul cu cifra obţinută şi se repetă procedeul, atunci când vom coborî cifre de după virgulă, punem şi la rezultat virgulă.

$\sqrt{231,50}$	15,21
1	25*5=125
131	~~26*6=156~~
125	302*2=604
==650	3041*1= 3041
604	
==4600	

3) Numere iraționale – se exprimă ca fracții zecimale cu un număr infint de zecimale care nu se repetă, sunt toate numerele care nu sunt raționale

Obs.1: mulțimea numerelor iraționale se notează $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$

Obs.2: toți radicalii care nu se extrag exact sunt numere iraționale, π este număr irațional

Obs.3.: $\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$

4) Determinarea valorii absolute (a modulului) unor numere care conţine radicali

E1)dacă nu se ştie valoarea aproximativă, se efectuează extragerea radicalului până la o zecimală

E2) Se foloseşte definiţia modulului: $|a|=\begin{cases}-a, & a<0\\ a, & a\geq 0\end{cases}$

Exp: $\left|2-\sqrt{3}\right|=?$. Deoarece $2=\sqrt{4}>\sqrt{3}\Rightarrow 2-\sqrt{3}>0\Rightarrow\left|2-\sqrt{3}\right|=2-\sqrt{3}$

Exp: $\left|\sqrt{3}-2\right|=?$.

Deoarece $2=\sqrt{4}>\sqrt{3}\Rightarrow\sqrt{3}-2<0\Rightarrow\left|\sqrt{3}-2\right|=-\left(\sqrt{3}-2\right)=2-\sqrt{3}$

Obs.: este bine de reţinut câteva aproximări ale unor numere iraţionale, dar nu se punctaj maxim dacă se folosesc direct:

$\sqrt{2}=1,41.....$; $\sqrt{3}=1,73.....$; $\pi=3,14....$

5) Scoaterea factorilor de sub radical – se descompune numărul de sub radical în puteri de factori primi, iar în faţa radicalului vor ieşi numere prime cu puterea împărţită la 2

Exp: $\sqrt{25}=\sqrt{5^2}=5$

$\sqrt{12}=\sqrt{2^2\cdot 3}=2\sqrt{3}$

$\sqrt{24}=\sqrt{2^3\cdot 3}=\sqrt{2^2\cdot 2\cdot 3}=2\sqrt{2\cdot 3}=2\sqrt{6}$

$\sqrt{96}=\sqrt{2^5\cdot 3}=\sqrt{2^4\cdot 2\cdot 3}=2^2\ \sqrt{2\cdot 3}=4\sqrt{6}$

Obs.: $\sqrt{a^2}=|a|$

Exp.: $\sqrt{(2-\sqrt{5})^2}=\left|2-\sqrt{5}\right|=\sqrt{5}-2$ căci $\sqrt{5}-2<0$

Obs.: dacă nu ştim semnul, scoatem moduldin expresie

$\sqrt{a^3b^5c^2}=\left|ab^2c\right|\sqrt{ab}$

6) Introducerea factorilor sub radical – numărul **pozitiv** din faţa radicalului se ridică la pătrat şi se înmulţeşte cu cel din interiorul radicalului

Obs.: semnul $"-"$ din faţa radicalului nu se introduce sub radical

Exp.: $2\sqrt{3}=\sqrt{2^2\cdot 3}=\sqrt{12}$

$-2\sqrt{3}=-\sqrt{2^2\cdot 3}=-\sqrt{12}$

7) Operaţii cu radicali (operaţii posibile doar pentru numere pozitive):

$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{a\cdot b}$ $\qquad$ $\sqrt{a}:\sqrt{b}=\sqrt{a:b}$ $\qquad$ $\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

Obs.:pentru $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ şi $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ nu există formulă

Obs.: $\sqrt{a^2+b^2}\neq a+b$, deşi $\sqrt{a^2\cdot b^2}=a\cdot b$

8) Compararea unor numere ce conţin radicali

Cazul I. un număr e negativ, altul pozitiv: $a<0$ şi $b>0\Rightarrow a<b$

*Exp.:*Comparaţi $\sqrt{2}-3$ cu $\sqrt{5}-2$.

Cum $\sqrt{2}-3<0,\sqrt{5}-2>0\Rightarrow\sqrt{2}-3<\sqrt{5}-2$

Cazul II: ambele numere sunt pozitive

Met.I: se compară pătratele acestor numere

*Exp.:*Comparaţi $a = 2\sqrt{3}$ cu $b = 3\sqrt{2}$. Cum ambele sunt pozitive, calculăm $a^2 = \left(2\sqrt{3}\right)^2 = 4 \cdot 3 = 12$ şi $b^2 = \left(3\sqrt{2}\right) = 3^2 \cdot 2 = 18$

Cum $a^2 < b^2$ şi a, b pozitive $\Rightarrow a < b$

Met.II. se introduc factori sub radicali

Exp.: Comparaţi $a = 2\sqrt{3}$ cu $b = 3\sqrt{2}$. Cum ambele sunt pozitive, introducem factorii sub radicali

$a = 2\sqrt{3} = \sqrt{2^2 \cdot 3} = \sqrt{12}$ $b = 3\sqrt{2} = \sqrt{3^2 \cdot 2} = \sqrt{18} \Rightarrow a < b$

Met.III: - se calculează aproximativ aceste numere şi dacă diferenţa e semnificativă, atunci le putem compara

Exp.: Comparaţi $a = 2\sqrt{3}$ cu $b = 3\sqrt{2}$. Cum ambele sunt pozitive,

$a = 2\sqrt{3} \approx 2 \cdot 1,73 \approx 3,46$ şi $b = 3\sqrt{2} \approx 3 \cdot 1,41 \approx 4,23 \Rightarrow a < b$

Cazul III. dacă ambele sunt negative se înmulţesc cu –1, apoi revenim la compararea a două numere pozitive

Exp.: Comparaţi $c = -2\sqrt{3}$ cu $d = -3\sqrt{2}$. Comparăm $a = 2\sqrt{3}$ cu $b = 3\sqrt{2}$ şi obţinem $2\sqrt{3} < 3\sqrt{2} \,\Big|\cdot(-1) \Rightarrow -2\sqrt{3} > -3\sqrt{2} \Rightarrow c > d$

9) Conjugatul unui radical- numărul cu care dacă înmulţim un radical dispare radicalul respectiv. Dăm câteva exemple :

Număr	Conjugat	Rezulatat	Formula
$\sqrt{a}$	$\sqrt{a}$	a	$\sqrt{x} \cdot \sqrt{x} \cdot = x$
$a\sqrt{b}$	$\sqrt{b}$	ab	$\sqrt{x} \cdot \sqrt{x} \cdot = x$
$\sqrt{a} - \sqrt{b}$	$\sqrt{a} + \sqrt{b}$	$a - b$	$(x-y)(x+y) = x^2 - y^2$
$\sqrt{a} + \sqrt{b}$	$\sqrt{a} - \sqrt{b}$	$a - b$	$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$
$a - \sqrt{b}$	$a + \sqrt{b}$	$a^2 - b$	$(x-y)(x+y) = x^2 - y^2$
$a + \sqrt{b}$	$a - \sqrt{b}$	$a^2 - b$	$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$

10) Raţionalizarea numitorilor - înseamnă amplificarea unei fracţii cu conjugatul numitorului astfel încât să dispară radicalul de la numitor

Obs. După raţionalizare, numărătorul poate să conţină radical.

Exp : $\frac{^{\sqrt{5})}2}{3\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{3\cdot 5}=\frac{2\sqrt{5}}{15}$

Exp.2 : $\frac{^{\sqrt{3}+1)}2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}=\frac{(2+\sqrt{3})(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}=\frac{2\sqrt{3}+2+3+\sqrt{3}}{3-1}=\frac{3\sqrt{3}+5}{2}$

11) Media aritmetică (media aritmetică a trei numere)

$$m_a=\frac{\text{suma numerelor}}{\text{câte numere sunt}}=\frac{a+b+c}{3}$$

12) Media ponderata $m_p=\frac{a\cdot p_a+b\cdot p_b+c\cdot p_c}{p_a+p_b+p_c}$

13) Media geometrică(media proporţională) $m_g=\sqrt{ab}$

Obs.: media geometrică se poate calcula (pentru elevii de gimnaziu) doar pentru 2 numere pozitive

14) Media armonică

15) $m_h=\frac{\text{câte numere sunt}}{\text{suma inverselor acestor numere}}=\frac{4}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}}$

Obs. **:** pentru 2 numere, media armonică se reţine poate mai uşor cu formula $m_h=\frac{2ab}{a+b}$. Aceasta provine din definiţie, căci

$$m_h=\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}=\frac{2}{\frac{b+a}{ab}}=2\cdot\frac{ab}{a+b}$$

16) Inegalitatea mediilor ar _ g _ at $\Rightarrow m_h\le m_g\le m_a$**,** cu egalitate doar dacă numerele sunt egale.

Obs.: Pentru 2 numere, inegalitatea se scrie : $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \le \sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2}$

17)
18)