Capitolul VIII
ECUAȚII, SISTEME DE INECUAȚII, INECUAȚII

1) Ecuaţie – este o relaţie cu o singură necunoscută în cadrul căreia apare o singură dată semnul $"="$

Exp. : $2x+1=-x+5$

2) Ecuaţia de gradul I – are forma $ax+b=0, a\neq 0$

Obs. : rezolvarea ecuaţiei $ax+b=0, a\neq 0$ este următoarea :

$$ax+b=0 \Leftrightarrow ax=-b \Leftrightarrow x=-\frac{b}{a}$$

3) Ecuaţii echivalente - au aceleaşi soluţii

Exp.: $2x+1=0 \Leftrightarrow 6x+3=0$ căci ambele ecuaţii au aceeaşi soluţie $x=-\frac{1}{2}$

4) Rezolvarea sistemelor de ecuaţii prin metoda reducerii - înseamnă înmulţirea a unei ecuaţii, eventual a amândurora cu numere reale astfel încât adunând ecuaţiile, să se reducă o necunoscută. Vom rezolva ecuaţia cu o singură necunoscută iar valoarea obţinută pentru această necunoscută o înlocuim în oricare din cele 2 ecuaţii pentru a determina cealaltă necunoscută.

Exp.: Rezolvaţi prin metoda reducerii sistemul de ecuaţii:

$$\begin{cases} 2x+3y=5 \\ 5x-7y=-2 \end{cases}$$

Vrem să reducem necunoscuta *x*, astfel că înmulţim prima ecuaţie cu (-5), iar cea de-a doua cu 2 şi astfel adunând va rămâne o ecuaţie doar cu necunoscuta y . Avem aşadar

$$\begin{cases} 2x+3y=5 \,|\cdot(-5) \\ 5x-7y=-2\,|\cdot 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -10x-15y=-25 \\ 10x-14y=-4 \end{cases}$$

$$/ \quad -29y=-29 \Rightarrow y=1$$

Înlocuind în prima ecuaţie obţinem $2x+3\cdot 1=5 \Rightarrow 2x=2 \Rightarrow x=1$.
Aşadar soluţia sistemului este $(x;y)=(1;1)$

5) Rezolvarea sistemelor de ecuaţii prin metoda substituţiei - înseamnă determinarea unei necunoscute din oricare ecuaţie în funcţie de cealaltă necunoscută, şi apoi înlocuirea în cealaltă ecuaţie.
Vom rezolva ecuaţia cu o singură necunoscută iar valoarea obţinută pentru această necunoscută o înlocuim în oricare din cele 2 ecuaţii pentru a determina cealaltă necunoscută.
*Exp :*Rezolvaţi prin metoda substituţiei sistemul de ecuaţii:

$$\begin{cases} 2x+3y=5 \\ 5x-7y=-2 \end{cases}$$

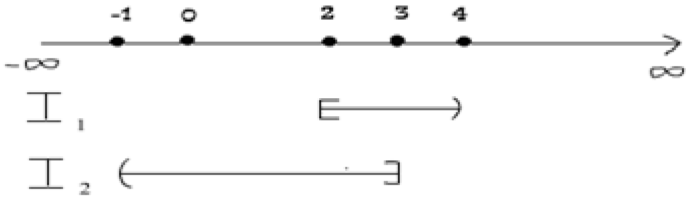
Din ecuaţia $2x+3y=5 \Rightarrow 2x=5-3y \Rightarrow x=\frac{5}{2}-\frac{3y}{2}$. Înlocuind în ecuaţia a II-a obţinem: $5x-7y=-2 \Rightarrow 5\cdot\left(\frac{5}{2}-\frac{3y}{2}\right)-7y=-2 \Rightarrow$

$$\frac{25}{2}-\frac{15y}{2}-7y=-2 \,\Big|\cdot 2 \Leftrightarrow 25-15y-14y=-4 \Leftrightarrow 29=29y \Leftrightarrow y=1.$$

Înlocuind în prima ecuaţie obţinem $2x+3\cdot 1=5 \Rightarrow 2x=2 \Rightarrow x=1$.
Aşadar soluţia sistemului este $(x;y)=(1;1)$

6) Intervale din $\mathbb{R}$ **-** este mulţimea tuturor numerelor reale cuprinse între capetele intervalului, este de fapt o “bucată din axa numerelor, se notează: $[a;b]$, $(a;b)$, $[a;b)$ sau $(a;b]$

Obs.: Dacă apare paranteză dreaptă, atunci acel interval conţine numărul din capăt, dacă apare paranteză rotundă, atunci acel interval nu conţine numărul din acel capăt.
Exp.: [2;4) înseamnă că îl conţine pe 2, conţine toata bucata dintre 2 si 4, nu conţine 4
*Obs.*2: reprezentarea pe axă



7) Operaţii cu intervale –se situează intervalele pe axă, preferabil unul sub celălalt, şi se folosesc definiţiile operaţiilor de $\cap, \cup, \setminus$

a) $\cap \rightarrow$ bucata comună
b) $\cup \rightarrow$ să fie cel puţin într-un interval
c) $\setminus \rightarrow$ să fie în primul, dar nu şi în al doilea

Exp.: $I_1 = (\infty; 3)$ $I_2 = [-4;5)$ $I_3 = (2;4)$

a) $I_1 \cap I_2 = [-4;3)$ b) $I_1 \setminus I_2 = (-\infty;-4)$

c) $I_2 \setminus I_1 = [3;5)$ d) $I_2 \setminus I_3 = [-4;2] \cup [4,5)$

e) $I_1 \cup I_2 = (-\infty;5)$ f) $I_1 \cap I_3 = (2;3)$

8) Inecuaţii de gradul I – pot fi aduse la una din formele $ax+b>0, ax+b\geq 0, ax+b<0$ sau $ax+b\leq 0$ unde $a\neq 0$

Obs.: rezolvarea impune trecerea lui b în stânga, apoi împărţirea prin a. Dacă $a>0$ atunci prin împărţire păstrăm acelaşi semn, iar dacă $a<0$ atunci prin împărţire schimbăm semnul

Exp 1: $2x+1<5 \Rightarrow 2x<4/:2 \Rightarrow x<2 \Rightarrow x\in(-\infty;2)$

Exp 2: $2x+1\leq 5 \Rightarrow x\leq 2 \Rightarrow x\in(-\infty;2]$

Exp 3: $-2x+1<5 \Rightarrow -2x<4/:(-2) \Rightarrow x>-2 \Rightarrow x\in(-2;\infty)$

Exp 4: $-2x+1\leq 5 \Rightarrow x\in[-2;\infty)$

Obs: dacă se cere determinarea unei mulţimi, trebuie să fim atenţi cui aparţin elementele mulţimii iniţiale

*Exp.:*Determinaţi mulţimea $A=\{x\in\mathbb{N}/2x+1<5\}$

$$\left.\begin{array}{c} 2x+1<5\Rightarrow x\in(-\infty;2) \\ dar\ x\in\mathbb{N} \end{array}\right\}\Rightarrow A\in\{0;1\}$$

9) Ecuaţia de gradul II – are forma $ax^2+bx+c=0, a\neq 0$

E1**)**se calculeaza $\Delta=b^2-4ac$

E2**)**dacă $\Delta>0\Rightarrow x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$

dacă $\Delta=0\Rightarrow x_1=x_2=\dfrac{-b}{2a}$

$\Delta<0\Rightarrow$ ecuaţia nu are rădăcini reale

*Exp.*Rezolvaţi ecuaţia: $2x^2-6x+1=0$

$\Delta=(-6)^2-4\cdot 2\cdot 1=36-8=28>0$

$$x_{1,2}=\frac{6\pm\sqrt{28}}{4}\Rightarrow x_1=\frac{6-2\sqrt{7}}{4}=\frac{3-\sqrt{7}}{2}, x_2=\frac{6+2\sqrt{7}}{4}=\frac{3+\sqrt{7}}{2}$$

10)